IMPRESSION ANASTALTIQUE
CULTURE ET CIVILISATION
115, AVENUE GABRIEL LEBON
BRUXELLES
1967

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ
Socio.

TOMUS SECUNDUS.

LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

INTRODUCTIO
IN
ANALYSIN INFINITORUM.
LIBER SECUNDUS,

Continens

Theoriam Linearum curvarum, una cum appendice de Superficiebus.

LIBER SECUNDUS.

CAPUT I.

De lineis curvis in genere.

1. QUoniam quantitas variabilis est magnitudo in genere considerata omnes quantitates determinatas in se complectens, in Geometria hujusmodi quantitas variabilis convenientissime repræsentabitur per lineam rectam indefinitam RS. Cum enim in linea indefinita magnitudinem quamcunque determinatam abscindere liceat, ea pariter ac quantitas variabilis eandem quantitatis ideam menti offert. Primum igitur, in linea indefinita RS punctum assumi debet A, unde magnitudines determinatæ abscindendæ initium sumere censeantur; sicque portio determinata AP repræsentabit valorem determinatum in quantitate variabili comprehensum. Tab. I. Fig. 1.

2. Sit igitur x quantitas variabilis, quæ per rectam indefi-

LIB. II. nitam RS repræſentetur, atque manifeſtum eſt omnes valores determinatos ipſius x, qui quidem ſint reales, per portiones in recta RS abſcindendas repræſentari poſſe. Scilicet, ſi punctum P in ipſo puncto A capiatur, intervallum AP evaneſcens exhibebit valorem $x = 0$; quo magis autem punctum P ab A removetur, eo major valor determinatus ipſius x intervallo AP repræſentabitur.

Vocantur autem hæc intervalla AP, ABSCISSÆ.

Atque ideo Abſciſſæ exhibent variabilis x valores determinatos.

3. Quia vero recta RS indefinita utrinque ab A in infinitum excurrit, utrinque etiam omnes ipſius x valores abſcindi poterunt. Quod ſi autem valores affirmativos ipſius x ab A dextrorſum progrediendo abſcindamus, intervalla Ap ſiniſtrorſum abſciſſa valores ipſius x negativos exhibebunt. Cum enim, quo longius punctum P dextrorſum ab A diſtat, intervallum AP eo majorem valorem ipſius x ſignificet; ſic viciſſim, quo magis punctum P ſiniſtrorſum removetur, eo magis valor ipſius x diminuetur; atque, ſi P ad A perveniat, omnino fiet $x = 0$. Hanc ob rem ſi P ulterius ſiniſtrorſum removeatur, valores ipſius x nihilo minores, hoc eſt negativi, denotabuntur, atque ideo intervalla Ap ab A ſiniſtrorſum abſciſſa valores ipſius x negativos exhibebunt, ſi quidem intervalla AP dextrorſum ſumta valores affirmativos præbere cenſeantur. Arbitrarium autem eſt utra plaga ad valores affirmativos ipſius x deſignandos eligatur: ſemper enim oppoſita valores ipſius x negativos continebit.

TAB. I. Fig. 2. 4. Cum igitur linea recta indefinita quantitatem variabilem x exhibeat, videamus quomodo Functio ipſius x quæcunque quam-commodiſſime geometrice repræſentari queat. Sit y Functio quæcunque ipſius x; quæ ergo valorem determinatum induat, ſi pro x valor determinatus ſubſtituatur. Sumta recta indefinita RAS ad valores ipſius x denotandos, cuilibet valori ipſius x determinato AP normaliter applicetur recta PM valori ipſius y reſpondenti æqualis. Scilicet, ſi valor

valor ipſius y prodeat affirmativus, is ſupra rectam RS conſtituatur, ſin autem valor ipſius y negativus oriatur, is infra rectam RS normaliter applicetur. Sumtis enim valoribus ipſius y affirmativis ſupra rectam RS, evaneſcentes in ipſam RS & negativi infra eam cadent. CAP. I.

5. Figura ergo ejuſmodi Functionem ipſius x, pro y exhibet, quæ, poſito $x = 0$, induat valorem affirmativum $= AB$, ſin capiatur $x = AP$, fit $y = PM$; ſi $x = AD$, fit $y = 0$, &, ſi ſumatur $x = AP$, Functio y accipit valorem negativum, ideoque normaliter applicata PM infra rectam RS cadit. Simili modo valores ipſius y, qui valoribus negativis ipſius x reſpondent, repræſentantur per applicatas ſupra RS poſitas, ſi ſint affirmativi; contra autem infra rectam RS conſtitui debent, ut pm: ſin autem, pro quopiam ipſius x valore, ut $-x = AE$, fiat $y = 0$, tum ibi longitudo Applicatæ evaneſcit.

6. Si igitur hoc modo pro omnibus valoribus determinatis ipſius x definiantur valores ipſius y reſpondentes, ad ſingula rectæ RS puncta P conſtituentur rectæ normaliter applicatæ PM valores Functionis y exprimentes, harumque Applicatarum PM alteri termini P in rectam RS incident, alteri vero M vel ſupra RS erunt poſiti, ſi valores ipſius y fuerint affirmativi; vel infra, ſi ſint negativi; vel etiam in ipſam rectam RS incident, ſi evaneſcant, uti evenit in punctis D & E. Singulæ ergo Applicatarum extremitates M repræſentabunt lineam quampiam, ſive rectam, ſive curvam; quæ igitur hoc modo per Functionem y determinabitur. Quare, quælibet ipſius x Functio, hoc modo ad Geometriam translata, certam determinabit lineam, ſive rectam ſive curvam, cujus natura a natura Functionis y pendebit.

7. Hoc autem modo linea curva, quæ ex Functione y reſultat, perfecte cognoſcitur; quoniam omnia ejus puncta ex Functione y determinantur; in ſingulis enim punctis P conſtat longitudo Applicatæ normalis PM, cujus extremum punctum M in linea curva ſit poſitum, ſicque omnia lineæ curvæ puncta inveniuntur. Quomodocunque autem linea curva fuerit com-

 parata,

 parata, ex ejus ſingulis punctis rectæ normales ad rectam RS duci poſſunt, ſicque obtinentur intervalla AP, quæ valores variabilis x exhibent, & longitudines Applicatarum PM, quæ valores Functionis y repræſentant. Hinc nullum curvæ extabit punctum, quod non hac ratione per Functionem y definiatur.

8. Quanquam complures lineæ curvæ per motum puncti continuum mechanice deſcribi poſſunt, quo pacto tota linea curva ſimul oculis offertur, tamen hanc linearum curvarum ex Functionibus originem hic potiſſimum contemplabimur, tanquam magis analyticam latiuſque patentem, atque ad calculum magis accommodatam. Quælibet ergo Functio ipſius x ſuppeditabit lineam quandam, ſive rectam ſive curvam, unde viciſſim lineas curvas ad Functiones revocare licebit. Cujuſque ergo lineæ curvæ natura exprimetur per ejuſmodi Functionem ipſius x, quæ, dum intervalla AP ad quæ perpendicula MP ex ſingulis curvæ punctis M in rectam RS demittuntur, per variabilem x indicantur, exhibeat ſemper veram iſtius Applicatæ MP longitudinem.

9. Ex hac linearum curvarum idea ſtatim ſequitur earum diviſio in *continuas*, & *diſcontinuas* ſeu *mixtas*. Linea ſcilicet curva *continua* ita eſt comparata, ut ejus natura per unam ipſius x Functionem definitam exprimatur. Quod ſi autem linea curva ita ſit comparata, ut variæ ejus portiones BM, MD, DM &c., per varias ipſius x Functiones exprimantur; ita ut, poſtquam ex una Functione portio BM fuerit definita, tum ex alia Functione portio MD deſcribatur; hujuſmodi lineas curvas *diſcontinuas* ſeu *mixtas* & *irregulares* appellamus: propterea quod non ſecundum unam legem conſtantem formantur, atque ex portionibus variarum curvarum continuarum componuntur.

10. De curvis autem continuis in Geometria potiſſimum eſt ſermo, atque infra oſtendetur, quæ curvæ motu uniformi ſecundum regulam quandam conſtantem mechanice deſcribuntur, eaſdem quoque per unicam Functionem exprimi, atque ideo eſſe

esse continuas. Sit igitur $mEBMDM$ linea curva continua,
cujus naturam contineat Functio quæpiam ipsius x, quæ sit y; atque manifestum est, sumtis valoribus ipsius x determinatis in recta RS, a puncto fixo A, tum valores ipsius y respondentes præbere Applicatarum normalium PM longitudinem.

11. In hac linearum curvarum explicatione nomina quædam sunt tenenda, quorum frequentissimus usus existit in doctrina de Lineis curvis.

Primum igitur recta RS, in qua valores ipsius x abscinduntur, vocatur AXIS, seu linea recta *directrix*.

Punctum A, a quo valores ipsius x mensurantur, dicitur *initium Abscissarum.*

Portiones autem Axis AP, quibus determinati ipsius x valores indicantur, vocari solent ABSCISSÆ.

Et perpendiculares PM, ex terminis *Abscissarum* M ad lineam curvam pertingentes, nomen APPLICATARUM obtinuerunt.

Vocantur autem hoc casu Applicatæ *normales* seu *orthogonales*, quia cum Axe angulum rectum constituunt; cum enim simili modo Applicatæ PM ad angulum obliquum cum Axe constitui possint, hoc casu Applicatæ *obliquangulæ* vocantur; hic vero constanter naturam curvarum per Applicatas orthogonales explicabimus, nisi expressis verbis contrarium indicetur.

12. Si igitur Abscissa quæcunque AP insigniatur per variabilem x, ut sit $AP = x$, tum Functio y indicabit magnitudinem Applicatæ PM, eritque $PM = y$. Natura igitur lineæ curvæ, si quidem fuerit continua, exprimetur per qualitatem Functionis y, seu per rationem, qua y ex x & quantitatibus constantibus componitur. In Axe igitur RS erit portio AS locus Abscissarum affirmativarum; portio AR locus Abscissarum negativarum; tum vero supra Axem RS existet regio Applicatarum affirmativarum, infra autem erit regio Applicatarum negativarum.

13. Cum igitur ex qualibet Functione ipsius x nascatur linea curva continua, hæc etiam ex illa Functione cognosci atque

Lib. II. que describi poterit. Tribuantur enim primo ipsi x valores affirmativi à o ad ∞ usque progrediendo, ac pro singulis quærantur valores Functionis y respondentes, quæ per Applicatas, sive sursum sive deorsum porrectas, repræsententur, prout valores habeant sive affirmativos sive negativos; sicque orietur portio curvæ BMM. Deinde simili modo ipsi x tribuantur omnes valores negativi ab o ad $-\infty$ progrediendo, & valores ipsius y respondentes determinabunt curvæ portionem BEm, sicque universa linea curva in Functione contenta exhibebitur.

14. Quia est y Functio ipsius x; vel y æquabitur Functioni ipsius x explicitæ, vel dabitur æquatio inter x & y, qua y per x definitur: utroque casu habebitur æquatio, quæ dicitur naturam curvæ exprimere. Hanc ob rem natura cujusque lineæ curvæ per æquationem inter duas variabiles x & y exhibetur; quarum altera x denotet Abscissas in Axe a dato principio A sumtas; altera vero y Applicatas ad Axem normales. Abscissæ autem & Applicatæ conjunctim consideratæ appellantur Coordinatæ *orthogonales*: hincque natura lineæ curvæ per æquationem inter Coordinatas orthogonales definiri dicitur, si habeatur æquatio determinans, qualis Functio ipsius x sit y.

15. Cum igitur linearum curvarum cognitio ad Functiones perducatur, tot varia linearum curvarum existent genera, quot supra Functionum esse vidimus. Ad modum ergo Functionum lineæ curvæ aptissime dividuntur in *algebraïcas* & *transcendentes*. Linea curva scilicet erit algebraïca, si Applicata y fuerit Functio algebraïca ipsius Abscissæ x; seu, cum natura lineæ curvæ exprimitur per æquationem algebraïcam inter Coordinatas x & y, hujus generis lineæ curvæ quoque *geometricæ* vocari solent. Linea curva autem *transcendens* est, cujus natura exprimitur per æquationem transcendentem inter x & y; seu, ex qua fit y Functio transcendens ipsius x. Hæcque est præcipua linearum curvarum continuarum divisio, qua eæ sunt vel *algebraïcæ* vel *transcendentes*.

16. Ad lineam autem curvam ex data Functione ipsius x, qua Applicata y exprimitur describendam, natura Functionis,

an

an ſit uniformis, an multiformis probe eſt attendenda. Ponamus primo y eſſe Functionem uniformem ipſius x, ſeu eſſe $y = P$, denotante P Functionem quamcunque uniformem ipſius x; &, quia ipſi x valorem quemvis determinatum tribuendo, Applicata y unum quoque valorem determinatum recipit, unicuique Abſciſſæ una reſpondebit Applicata, & hanc ob rem Curva ita erit comparata, ut, ſi in quovis Axis RS puncto P ducatur ad ipſum normalis PM, ea ſemper Curvam ſecet, idque in unico puncto M. Singulis ergo Axis punctis ſingula reſpondebunt Curvæ puncta; &, cum Axis utrinque in infinitum extendatur, Curva quoque utrinque in infinitum excurret. Seu Curva ex tali Functione orta continuo tractu utrinque cum Axe in infinitum porrigetur, cujuſmodi tractum figura 2 exhibet, ubi linea curva $mEBMDM$ utrinque ſine ulla interruptione in infinitum excurrit. CAP. I.

17. Sit y Functio biformis ipſius x, ſeu denotantibus litteris P & Q Functiones ipſius x uniformes, ſit $yy = 2Py - Q$ ut ſit $y = P \pm \surd(PP - Q)$. Unicuique igitur Abſciſſæ x reſpondebit duplex Applicata y, utraque exiſtente vel reali vel imaginaria: prius ſi $PP > Q$, poſterius ſi $PP < Q$. Quamdiu ergo uterque valor ipſius y erit realis, Abſciſſæ AP duplex conveniet Applicata PM, PM, ſeu recta ad Axem in P normalis Curvam in duobus punctis M & M trajiciet. Ubi autem fit $PP < Q$, ibi Abſciſſæ nulla convenit Applicata; ſeu normalis ad Axem his in locis Curvæ nuſquam occurret, uti fit in p. At cum ante eſſet $PP > Q$, fieri non poterit $PP < Q$, niſi tranſeundo per caſum $PP = Q$, qui erit limes inter Applicatas reales & imaginarias. Ubi ergo Applicatæ reales deſinunt, uti in C vel G, ibi fit $y = P \pm 0$, ſeu ambæ Applicatæ inter ſe fiunt æquales, ibique Curva curſum inflectendo regredietur. TAB. I. *Fig.* 3.

18. Secundum Figuram apparet, dum Abſciſſa negativa $-x$ contineatur intra limites AC & AE, Applicatam y fieri imaginariam, eſſeque $PP < Q$: ultra E vero ſiniſtrorſum progrediendo Applicatæ iterum fiunt reales, quod fieri nequit niſi

LIB. II. in E fit $PP = Q$, ideoque ambæ Applicatæ conveniant. Tum rurfus Abfciffis AP duplex Applicata Pm, Pm refpondet, donec ad G perveniatur, ubi hæ duæ Applicatæ conveniunt, atque ultra G denuo fiunt imaginariæ. Hujufmodi ergo linea curva conftare poterit ex partibus a fe invicem disjunctis ut $MBDBM$ & $FmHm$ duabus pluribufve: nihilo vero minus hæ partes conjunctim confideratæ unam Curvam continuam feu regularem conftituere funt cenfendæ, quia hæ fingulæ partes ex una eademque Functione nafcuntur. Iftæ ergo Curvæ hanc habent proprietatem, ut, fi in fingulis Axis punctis normaliter producantur rectæ MM, eæ femper Curvam vel nufquam vel in duobus punctis trajiciant; nifi forte duo interfectionis puncta in unum coalefcant, quod fit fi Applicatæ per puncta D, F, H, vel I ducantur.

19. Si y fuerit Functio triformis ipfius x, feu fi y per hujufmodi æquationem $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$ definiatur, exiftentibus P, Q, & R Functionibus uniformibus ipfius x, tum pro quovis valore ipfius x Applicata y tres habebit valores, qui, vel omnes erunt reales, vel unicus tantum, reliquis duobus exiftentibus imaginariis Hinc omnes Applicatæ Curvam fecabunt, vel in tribus punctis, vel tantum in unico, nifi ubi duo vel etiam tria interfectionis puncta in unum colefcunt. Cum igitur unicuique Abfciffæ faltem una Applicata realis conveniat, neceffe eft ut Curva utrinque cum Axe in infinitum excurrat. Curva ergo vel uno continuo tractu conftabit, ut in *Figura quarta;* vel duabus partibus a fe fejunctis, ut in *Figura quinta;* vel pluribus, quæ tamen omnes conjunctæ unam eandemque Curvam continuam conftituunt.

TAB. I. *Fig.* 4. & 5.

20. Si y fuerit Functio quadriformis ipfius x, feu fi y per hujufmodi æquationem $y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = 0$ definiatur, tum unicuique valori ipfius x, vel quatuor refpondebunt valores reales ipfius y, vel duo tantum, vel omnino nullus. Hinc, in Curva ex hujufmodi Functione quadriformi orta fingulæ Applicatæ Curvam fecabunt vel in quatuor punctis, vel

vel in duodus tantum, vel nusquam, quos singulos casus *Figura Sexta* exhibet; notari autem debent loca *I* & *o*, ubi duo intersectionis puncta in unum coalescunt. Hanc ob rem tam dextrorsum quam sinistrorsum vel nulli Curvæ rami in infinitum excurrunt, vel duo vel etiam quatuor. Priori casu, quo ex neutra parte nulli rami in infinitum extenduntur, Curva undique erit clausa, ut figura indicat, spatiumque definitum includit. Hinc ergo jam concludi potest indoles linearum curvarum, quæ formantur ex Functionibus multiformibus quotcunque significatuum. CAP. I. TAB. II. *Fig. 6.*

21. Si scilicet fuerit y Functio multiformis, seu determinetur per æquationem, in qua n sit exponens maximæ potestatis ipsius y, tum numerus valorum realium ipsius y erit vel n, vel $n - 2$, vel $n - 4$, vel $n - 6$, &c., in totidem ergo punctis quælibet Applicata Curvam intersecabit. Ita, si una Applicata Curvam continuam secet in m punctis, omnes aliæ Applicatæ Curvam secabunt in tot punctis, quorum numerus semper numero pari differat ab m; nusquam ergo Curva ab Applicata secari poterit in $m + 1$, vel $m - 1$, vel $m \pm 3$ &c., punctis. Hoc est, si numerus intersectionum unius Applicatæ fuerit par vel impar, omnes quoque Applicatæ reliquæ Curvam secabunt in punctorum numero vel pari vel impari.

22. Si igitur una Applicata Curvam secet in punctorum numero impari, tum fieri nequit, ut ulla alia Applicata Curvam nusquam intersecet: Curva ergo utrinque ad minimum unum habebit ramum in infinitum excurrentem, &, si ex alterutra parte plures rami in infinitum extendantur, eorum numerus debet esse impar, quia numerus intersectionum unius cujusque Applicatæ non potest esse par; si ergo rami utrinque in infinitum excurrentes simul numerentur, eorum numerus constanter erit par. Hoc idem locum habet si Applicatæ Curvam intersecent in punctorum numero pari, tum enim ex utraque parte seorsim vel nullus, vel duo, vel quatuor &c., rami in infinitum excurrent, unde ergo quoque omnium ramorum in infinitum excurrentium numerus erit par. Jam igitur adepti su-

 mus aliquot insignes proprietates Curvarum continuarum & regularium, unde eas a Curvis discontinuis & irregularibus discernere licet.

CAPUT II.

De Coordinatarum permutatione.

Tab. I. Fig. 2.

23. Quemadmodum ex æquatione inter Coordinatas x & y, quarum illa Abscissam, hæc Applicatam denotat, data Curva describitur super Axe RS, initio Abscissarum A alicubi pro lubitu assumto, ita vicissim, si jam descripta fuerit linea curva ejus natura exprimi poterit per æquationem inter Coordinatas. Hic autem quamvis Curva sit data, duæ tamen res in arbitrio nostro relinquuntur, positio scilicet Axis RS, & principium Abscissarum A. Quæ cum infinitis modis variari queant, etiam pro eadem linea Curva innumerabiles æquationes exhiberi poterunt, hancque ob causam ex æquationum diversitate non semper ad diversitatem linearum curvarum, quæ illis æquationibus exprimantur concludere licet, etiamsi diversæ Curvæ perpetuo diversas præbeant æquationes.

24. Cum igitur, variato tam Axe quam Abscissarum initio, innumerabiles oriantur æquationes ejusdem Curvæ naturam exprimentes, hæ omnes ita inter se erunt comparatæ, ut ex data æquatione una reliquæ omnes inveni queant. Ex data enim æquatione inter Coordinatas ipsa linea curva determinatur, hac autem cognita, si quæcunque linea recta pro Axe, & in ea punctum pro Abscissarum principio assumatur, æquatio inter Coordinatas orthogonales definietur. Hoc igitur Capite methodum trademus, cujus ope, si æquatio pro Curva fuerit data, ad alium Axem quemcunque, & Abscissarum initium quodcunque æquatio inter Coordinatas inveniri queat, quæ ejusdem Curvæ naturam exprimat. Atque hoc modo reperientur omnes

omnes omnino æquationes, quæ ejusdem Curvæ naturam comprehendant, sicque facilius diversitas linearum curvarum ex æquationum diversitate dijudicari poterit. CAP. II.

25. Sit igitur data æquatio quæcunque inter x & y, ex qua sumta recta RS pro Axe, & puncto A pro initio Abscissarum, ita ut x denotet Abscissam AP & y Applicatam PM, producatur linea curva CBM, cujus ergo natura per æquationem datam exprimitur. Retineamus jam primum eundem Axem RS, at aliud punctum in eo D pro initio Abscissarum assumamus, ita ut nunc puncto curvæ M respondeat Abscissa DP, quæ ponatur $= t$, Applicata vero MP manebit eadem $= y$, quæ ante: quæramus igitur æquationum inter t & y, qua ejusdem Curvæ CBM natura exprimatur. Ponatur intervallum $AD = f$, quod ab A sinistrorsum in regionem Abscissarum negativarum cadat, eritque $DP = t = f + x$, ideoque $x = t - f$. Quare si in æquatione inter x & y data ubique loco x substituatur $t - f$, prodibit æquatio inter t & y, quæ eandem lineam curvam CBM exhibebit. Cum igitur magnitudo $AD = f$ ab arbitrio nostro pendeat, jam innumerabiles diversas adepti sumus æquationes, quæ omnes eandem lineam curvam exprimant. TAB. II. Fig. 7.

26. Si Curva alicubi Axem RS trajiciat, uti in C, tum sumto hoc puncto C pro initio Abscissarum, ejusmodi obtinebitur æquatio, quæ, posita Abscissa $CP = 0$, simul Applicatam PM evanescentem sit præbitura; si quidem unica tantum Applicata puncto Axis C respondeat. Intersectio autem C, si ulla pluresve dentur, invenietur ex æquatione primum proposita inter x & y, ponendo $y = 0$, & ex æquatione quærendo valorem vel valores ipsius x. Ubi enim Curva in Axem incidit, ibi fit $y = 0$, facto ergo vicissim $y = 0$, omnes illæ Abscissæ seu valores ipsius x elicientur, ubi Curva in Axem incidit.

27. Initium ergo Abscissarum, retento Axe, mutabitur si Abscissa x data quantitate sive augeatur sive minuatur; hoc est, si loco x ponatur $t - f$: ubi f erit quantitas affirmativa, si

LIB. II. novum Abſciſſarum initium D ſiniſtrorſum ab A fuerit remotum; erit vero f quantitas negativa, ſi punctum D ad dextram ab A fuerit ſitum.

TAB. II. Fig. 8. Ponamus nunc deſcripta Curva LBM ex data æquatione inter $AP = x$ & $PM = y$, alium aſſumi Axem rs priori parallelum in eoque punctum D pro Abſciſſarum initio: cadat autem iſte Axis in regionem Applicatarum negativarum, ſitque ejus a priori Axe diſtantia $AF = g$, atque ponatur intervallum $DF = AG = f$. Sit igitur in hoc novo Axe Abſciſſa puncto Curvæ M reſpondens, $DQ = t$, & Applicata $QM = u$, eritque $t = DF + FQ = f + x$, & $u = PM + PQ = g + y$, unde fit $x = t - f$ & $y = u - g$. Quare ſi in æquatione inter x & y data ſubſtituatur ubique $t - f$ loco x, & $u - g$ loco y, orietur æquatio inter t & u, qua ejuſdem lineæ curvæ natura exprimetur.

28. Cum igitur magnitudines f & g ab arbitrio noſtro pendeant, hincque infinitis modis definiri queant, infinities plures diverſæ formari poterunt æquationes quam priori caſu, quæ tamen omnes ad eandem lineam curvam pertineant. Quod ſi ergo duæ æquationes altera inter x & y, & altera inter t & u, hoc tantum a ſe invicem diſcrepent, ut altera in alteram transformetur, ſi Coordinatæ unius datis quantitatibus ſive augeantur ſive minuantur, tum ambæ æquationes licet diverſæ tamen eandem lineam curvam exhibebunt. Hinc igitur facile innumerabiles formabuntur æquationes diverſæ, quæ tamen omnes ejuſdem lineæ curvæ naturam exprimant.

TAB. II. Fig. 9. 29. Statuatur novus Axis rs normalis ad priorem RS, ſecanſque ipſum in principio Abſciſſarum A, ita ut pro utroque Axe idem ſit Abſciſſarum initium A. Quoniam pro Axe RS datur æquatio ad Curvam LM inter Abſciſſam $AP = x$, & Applicatam $PM = y$, ducatur ex Curvæ puncto M in novum Axem rs perpendicularis MQ & vocetur Abſciſſa nova $AQ = t$, Applicata nova $QM = u$, eritque ob $APMQ$ parallelogrammum rectangulum, $t = y$ & $u = x$. Hinc, ex æquatione inter x & y data, formabitur æquatio inter t & u, ponendo

ponendo u loco x & t loco y. Prior ergo Abſciſſa x nunc abit in Applicatam $QM = u$, & prior Applicata y nunc abit in Abſciſſam $AQ = t$, pro iſto itaque novo Axe nulla alia æquationi variatio inducitur niſi, quod Coordinatæ x & y inter ſe commutentur: hancque ob rationem Abſciſſa & Applicata ſimul Coordinatæ vocari ſolent, nullo facto diſcrimine, utra pro Abſciſſa Applicatave accipiatur. Propoſita enim æquatione inter duas Coordinatas x & y, eadem Curva emergit, ſive x ſive y ad Abſciſſam indicandam accipiatur. Cap. II.

30. Poſuimus hic novi Axis rs portionem As exhibere Abſciſſas affirmativas, atque ad dextram Axis rs ſtatui regionem Applicatarum affirmativarum, quæ cum ab arbitrio pendeant, pro lubitu immutari poterunt. Scilicet ſi Axis portio Ar Abſciſſis affirmativis deſtinetur, erit utique $AQ = -t$, ſicque in æquatione inter x & y loco y poni debet $-t$. Deinde ſi ad dextram Axis rs regio Applicatarum negativarum ſtatuatur, fiet $QM = -u$, atque pro x ſcribi debebit $-u$. Atque hinc intelligitur naturam lineæ curvæ non mutari etiamſi in æquatione inter Coordinatas vel alterutra vel utraque negativa ſtatuatur; id quod in omnibus æquationis tranſmutationibus eſt tenendum.

31. Secet nunc novus Axis rs priorem RS ſub angulo quocunque SAs; fiatque interſectio in ipſo Abſciſſarum initio A, quod punctum in utroque Axe initium Abſciſſarum conſtituat. Data ergo ſit pro Axe RS æquatio quæcunque pro Curva LM inter Abſciſſam $AP = x$ & Applicatam $PM = y$, ex qua reperiri debeat æquatio ad eandem Curvam pro novo Axe rs, ſeu ex Curvæ puncto M ad novum Axem demiſſo perpendiculo MQ, inter Abſciſſam novam $AQ = t$, & Applicatam $MQ = u$. Sit angulus $SAs = q$; ejus Sinus $= m$, & Coſinus $= n$, ſumta unitate pro Sinu toto ut ſit $mm + nn = 1$. Ex P ducantur normales Pp & Pq in novas Coordinatas, eritque ob $AP = x$, $Pp = x.\,\mathit{ſin}.\,q$; $Ap = x.\,\mathit{coſ}.\,q$, deinde quia angulus $PMQ = PAQ = q$, erit ob $PM = y$, $Pq = Qp = y.\,\mathit{ſin}.\,q$; $Mq = y.\,\mathit{coſ}.\,q$. Ex his ergo fiet $AQ = t =$ Tab. II Fig. 10.

$Ap -$

LIB. II. $Ap - Qp = x.\cos.q - y.\sin.q$, & $QM = u = Mq + Pp = x.\sin.q + y.\cos.q$.

32. Cum autem ſit $\sin.q = m$, $\cos.q = n$, erit $t = nx - my$ & $u = mx + ny$, hinc fiet $nt + mu = nnx + mmx = x$, & $nu - mt = nny + mmy = y$. Æquatio ergo quæſita inter t & u reperietur, ſi in æquatione inter x & y propoſita ubique loco x ſcribatur $mu + nt$ & $nu - mt$ loco y, ſi quidem Axis portio As contineat Abſciſſas affirmativas, & Applicatæ affirmativæ in regionem QM cadant. Poſuimus hic etiam angulum SAs in regionem Applicatarum negativarum cadere; quod ſi autem As ſupra AS caderet, in calculo angulus $SAs = q$ negativus, ac propterea ejus Sinus m negative accipi deberet.

TAB. III. Fig. 11. 33. Tribuatur nunc novo Axi rs poſitio quæcunque, in eoque ſumatur punctum quodvis D pro Abſciſſarum initio. Sit RS Axis prior, pro quo habetur æquatio inter Abſciſſam $AP = x$ & Applicatam $PM = y$, qua natura Curvæ LM exprimitur; unde æquatio inter alias Coordinatas t & u ad novum Axem rs relatas exhiberi debet. Demiſſo ſcilicet ex quovis Curvæ puncto M in novum Axem rs perpendiculo MQ vocetur Abſciſſa $DQ = t$, & Applicata $QM = u$. Inter quas ut æquatio inveniatur, ex novo Abſciſſarum initio D in Axem priorem RS ducatur perpendicularis DG, ac ponatur $AG = f$ & $DG = g$, tum per D priori Axi RS producatur parallela DO, cui prior Applicata PM producta occurrat in O, eritque $MO = y + g$, & $DO = GP = x + f$. Denique ponatur angulus $ODQ = q$, cujus Sinus ſit $= m$, & Coſinus $= n$, poſito ſemper Sinu toto $= 1$, ut ſit $mm + nn + = 1$.

34. Jam ex puncto O ducantur tam in novum Axem DQ quam in Applicatam MQ normales Op & Oq, atque, ob angulum $OMQ = ODQ$ & $DO = x + f$, ac $MO = y + g$, erit $Op = Qq = (x + f).\sin.q = mx + mf$ & $Dp = (x + f).\cos.q = nx + nf$. Porroque $Oq = Qp = (y + g).\sin.q = my + mg$ & $Mq = (y + g).\cos.q = ny + ng$.

Ex

Ex his igitur colligetur $DQ = t = nx + nf - my - mg$ & $QM = u = mx + mf + ny + ng$, ſicque ex x & y definientur novæ Coordinatæ t & u. Hinc vero erit $nt + mu = x + f$ & $nu - mt = y + g$, ob $mm + nn = 1$, quocirca habebitur $x = mu + nt - f$, & $y = nu - mt - g$, qui ergo valores ſi in æquatione inter x & y data loco x & y ſubſtituantur, prodibit æquatio inter t & u, qua ejuſdem Curvæ LM natura exprimetur. CAP. II.

35. Quoniam nullus excogitari poteſt Axis rs, qui quidem in eodem plano cum Curva ſit ſitus, qui non in hac poſtrema determinatione contineatur; pro eadem quoque Curva LM nulla exiſtet æquatio inter Coordinatas orthogonales, quæ non in hac æquatione inter t & u inventa comprehendatur. Cum igitur quantitates f & g cum angulo q, unde m & n pendent, infinitis modis variari queant, omnes æquationes, quæ in æquatione inter t & u hoc modo inventa continentur, ejuſdem lineæ curvæ naturam exprimens. Hanc ob rem iſta æquatio inter t & u vocari ſolet æquatio generalis pro Curva LM, quoniam ea in ſe complectitur omnes omnino æquationes, quæ ad eandem lineam curvam pertinent.

36. Supra jam innuimus difficile eſſe ex diverſitate aliquot æquationum inter Coordinatas judicare, utrum eæ ad eandem lineam curvam, an ad diverſas referantur: nunc igitur patet via omnes hujuſmodi quæſtiones dijudicandi. Sint enim duæ propoſitæ æquationes, altera inter x & y, & altera inter t & u, ponatur in illa $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, ubi m & n ita a ſe invicem pendent ut ſit $mm + nn = 1$; quo facto diſpiciendum erit utrum altera illa æquatio inter t & u in hac, quæ modo eſt eruta, contineatur, ſeu an quantitates f, g cum m & n ita definiri poſſint, ut ipſa altera æquatio inter t & u reſultet. Quod ſi fieri poſſit, ambæ æquationes eandem lineam curvam exprimens, ſin ſecus diverſas.

LIB. II.

EXEMPLUM.

Hoc modo patebit has duas æquationes

$$yy - ax = 0$$
$$\&$$
$$16uu - 24tu + 9tt - 55au + 10at = 0,$$

ad eandem lineam curvam referri, etiamsi ipsæ plurimum discrepent: si enim in priori æquatione ponamus $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, ea transformabitur in hanc

$$\begin{matrix} nnuu - 2mntu + mmtt - 2ngu + 2mgt + gg \\ - mau - nat + af \end{matrix} = 0.$$

Num igitur in hac altera illa æquatio contineatur, multiplicemus illam per nn hanc vero per 16, ut termini primi utrinque congruant, habebiturque

$$16nnuu - 24nntu + 9nntt - 55nnau + 10nnat = 0$$
$$\&$$
$$\begin{matrix} 16nnuu - 32mntu + 16m^2tt - 32ngu + 32mgt + 16gg \\ - 16mau - 16nat + 16af \end{matrix} = 0.$$

Nunc inquiratur quot termini, arbitrariis f, g, m & n determinandis, æquales reddi queant, ac primo quidem habebimus $24nn = 32mn$ & $9nn = 16mm$, quarum utraque dat $3n = 4m$, & ob $mm = 1 - nn$, erit quoque $25nn = 16$, hinc $n = \frac{4}{5}$ & $m = \frac{3}{5}$, sicque jam tres termini conveniunt. Quartus & quintus dant $55nna = 32ng + 16ma$ & $10nna = 32mg - 16na$, unde an idem pro g valor eruatur videndum est, dat vero prior $g = \frac{55na}{32} - \frac{ma}{2n} = \frac{11a}{8} - \frac{3a}{8} = a$, & posterior $g = \frac{5nna}{16m} + \frac{na}{2m} = \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} = a$, uterque ergo valor congruit, & jam quinque termini conveniunt. Nil aliud ergo

ergo ſupereſt, niſi ut ſit $gg + af = 0$, quod, cum f nondum ſit determinatum, nil habet difficultatis, fiet enim $f = - a$. Oſtenſum ergo eſt, has duas æquationes propoſitas eandem lineam curvam exhibere. CAP. II.

37. Quanquam autem fieri poteſt, ut æquationes admodum diverſæ eandem lineam curvam repræſentent, tamen ſæpenumero ex æquationum diverſitate tuto linearum curvarum diverſitas concluditur. Evenit hoc ſi æquationes propoſitæ ad diverſos ordines pertineant, ſeu in quibus maximæ dimenſiones, quas Coordinatæ x & y ſeu t & u conſtituunt, ſunt diverſæ, hoc enim caſu lineæ curvæ, quæ per has æquationes indicantur, certo erunt diverſæ. Cujuſcunque enim ordinis fuerit æquatio inter x & y, ſi ponatur $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, reſultabit æquatio inter t & u ejuſdem ordinis; quare, ſi altera æquatio inter t & u propoſita ad alium ordinem pertineat, Curvam quoque diverſam indicabit.

38. Niſi igitur duæ æquationes, altera inter x & y altera inter t & u, ad eundem ordinem pertineant, ſtatim concludendum eſt lineas curvas, quæ illis æquationibus exprimuntur, eſſe diverſas. Dubitatio ergo tantum locum habere poteſt, ſi ambæ æquationes fuerint ejuſdem ordinis, hiſque ſolum caſibus inveſtigatione ante tradita opus erit, quæ autem cum ſatis operoſa evadat, ſi æquationes ad altiorem quempiam ordinem pertineant, infra expeditiores regulæ tradentur, ex quibus ſtatim varietas Curvarum dignoſci poterit.

39. Quæ hic de invenienda æquatione generali pro quavis linea curva ſunt præcepta, eadem ad lineam rectam accommodari poſſunt. Sit enim, loco lineæ curvæ, propoſita linea recta LM, quam Axi RS parallelam ſtatuamus: ubicunque ergo initium Abſciſſarum A capiatur, erit ſemper Applicata PM conſtantis magnitudinis, ſeu $y = a$; quæ ergo eſt æquatio pro linea recta Axi parallela. Quæramus hinc æquationem generalem lineæ rectæ ad Axem quemcunque rs relatam; poſito ergo $DG = g$, anguli ODs Sinu $= m$, Coſinu $= n$, & vocata Abſciſſa $DQ = t$, & Applicata $MQ = u$, ob $y =$ TAB. III. *Fig.* 12.

 $nu -$

LIB. II. $nu - mt - g$, erit $nu - mt - g - a = 0$, quæ eſt æquatio generalis pro linea recta. Multiplicetur ea per conſtantem k & ponatur $nk = \alpha$, $mk = -\beta$ & $(g+a)k = -b$, eritque æquatio $\alpha u + \beta t + b = 0$ pro linea recta, quæ cum ſit æquatio primi ordinis inter t & u generalis, patet omnem æquationem primi ordinis inter duas Coordinatas, nullam lineam curvam, ſed rectam lineam exhibere.

TAB. III. Fig. 13. 40. Quoties ergo inter Coordinatas x & y talis prodit æquatio $\alpha x + \beta y - a = 0$; toties ea præbet lineam rectam, cujus poſitio reſpectu Axis RS ita determinabitur. Ponatur primo $y = 0$, ſicque in Axe reperitur punctum C, ubi hæc recta Axem trajicit, fit enim $AC = \frac{a}{\alpha}$; tum ponatur $x = 0$, fietque $y = \frac{a}{\beta}$ qui eſt valor Applicatæ AB in initio Abſciſſarum. Cum ergo habeantur duo puncta, B & C, in recta quæſita, ea erit definita, ideoque æquationi propoſitæ ſatisfaciet recta LM. Ponatur enim Abſciſſa quæcunque $AP = x$ & reſpondens Applicata $MP = y$, erit ob ſimilitudinem triangulorum CPM, CAB, $CP : PM = CA : AB$, hoc eſt $\frac{a}{\alpha} - x : y = \frac{a}{\alpha} : \frac{a}{\beta}$, unde fit $\frac{ay}{\alpha} = \frac{aa}{\alpha\beta} - \frac{ax}{\beta}$, ſeu $\alpha x + \beta y = a$, quæ eſt ipſa æquatio propoſita.

41. Si fuerit vel α vel $\beta = 0$, tum iſta conſtructio uſum habere non poterit, at vero iſti caſus per ſe ſunt facillimi. Sit enim $\alpha = 0$, & $y = a$, unde patet lineam ſatisfacientem eſſe rectam Axi parallelam ab eoque intervallo $= a$ remotam, ſin ſit $a = 0$, ſeu $y = 0$, linea ſatisfaciens in Axem incidet. Quod ſi vero fuerit $\beta = 0$, & $x = a$, perſpicuum eſt lineam ſatisfacientem eſſe rectam ad Axem normalem, quæ ab initio Abſciſſarum intervallo $= a$ diſtet. Hoc ſcilicet caſu omnibus Applicatis unica Abſciſſa reſpondet, ita ut Abſciſſa quantitas variabilis eſſe deſinat. Ex his igitur luculenter perſpicitur, quemadmodum lineæ rectæ per æquationes inter Coordinatas orthogonales deſignari queant.

42. Aſſum-

42. Assumsimus hactenus Coordinatas, quibus natura Curvæ definitur, inter se esse normales, simili vero modo etiam ex data æquatione linea curva definietur, si Applicatæ ad Axem sub angulo quocunque inclinentur. Vicissim ergo natura Curvæ exprimi poterit per æquationem inter duas Coordinatas obliquangulas, atque hujusmodi æquationes quoque variatis cum Axe tum principio Abscissarum innumerabilibus modis variari possunt, manente Curva eadem. Sicque pro quavis obliquitate Coordinatarum æquatio generalis ad Curvam exhiberi potest. Quod si vero etiam hæc obliquitas alia atque alia statuatur, multo latius patens eruetur æquatio pro Curva, quam æquationem generalissimam appellabimus, quoniam naturam Curvæ non solum exprimit per æquationem ad quemvis Axem & quodcunque initium Abscissarum relatam, sed etiam pro quacunque Coordinatarum obliquitate. Hæcque adeo æquatio generalissima abibit in æquationem generalem, si angulus, quem Coordinatæ inter se constituunt, rectus statuatur. CAP. II.

43. Data sit pro Curva LM æquatio inter Coordinatas rectangulas, nempe inter $AP = x$ & $PM = y$, & quæratur, retento Axe RS & initio Abscissarum A eodem, æquatio inter Coordinatas, quæ datum angulum comprehendant qui sit $= \phi$. Ex puncto ergo M ad Axem RS ducatur recta MQ ad angulum illum datum MQA, cujus Sinus sit $= \mu$ & Cosinus $= \nu$. Erit ergo AQ nova Abscissa, & MQ nova Applicata: posito ergo $AQ = t$ & $QM = u$, erit in triangulo rectangulo PMQ, $\frac{y}{u} = \mu$ & $\frac{PQ}{u} = \nu = \frac{t - x}{u}$. Quocirca fiet $u = \frac{y}{\mu}$ & $t = \nu u + x = \frac{\nu y}{\mu} + x$, & vicissim $y = \mu u$ & $x = t - \nu u$. Consequenter si in æquatione inter x & y proposita ponatur $x = t - \nu u$ & $y = \mu u$ prodibit æquatio inter Coordinatas obliquangulas t & u, quæ inter se datum angulum ϕ constituant. TAB. III. Fig. 14.

44. Quod si autem data fuerit pro Curva LM æquatio inter Coordinatas obliquangulas AQ & QM; ex ea vicissim

 reperietur

LIB. II. reperietur æquatio pro eadem Curva inter Coordinatas orthogonales AP & PM. Sit enim ϕ angulus, quem Applicatæ MQ cum Abſciſſis AQ conſtituunt, cujus Sinus $= \mu$ & Coſinus $= \nu$. dataque ſit æquatio inter $AQ = t$ & $QM = u$. Ex M ducatur ad Axem Applicata normalis MP, &, poſita Abſciſſa $AP = x$ & Applicata $MP = y$, quia eſt $u = \frac{y}{\mu}$ & $t = \frac{\nu y}{\mu} + x$, ſi hi valores in æquatione inter t & u propoſita ſubſtituantur, prodibit æquatio inter x & y, quæ quærebatur.

TAB. IV. Fig. 15. 45. Data nunc æquatione inter Coordinatas orthogonales $AP = x$, & $PM = y$ pro Curva LM, hoc modo æquatio generaliſſima pro eadem linea curva inveniri poterit. Sumatur recta quæcunque rs pro Axe, & in eo punctum D pro Abſciſſarum initio; Applicatæ vero MT ad hunc Axem ductæ faciant angulum $DTM = \phi$, cujus Sinus ſit $= \mu$ & Coſinus $= \nu$; erit ergo nova Abſciſſa DT & Applicata TM, inter quas æquatio quæritur. Ex D in Axem priorem RS ducatur perpendicularis DG, & ſit $AG = f$; $DG = g$, ductaque DO Axi RS parallela ſit anguli ODs Sinus $= m$, Coſinus $= n$. Ducatur, ut ante fecimus, ex M ad Axem novum rs normalis MQ, & ponatur $DQ = t$; $QM = u$; Coordinatæ autem obliquangulæ ſint $DT = r$; $TM = s$; Erit ergo primo $t = r - \nu s$ & $u = \mu s$ (43); deinde vero eſt $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$ (36). Hinc fiet $x = nr - (n\nu - m\mu)s - f$ & $y = -mr + (\mu n + \nu m)s - g$, ubi eſt $n\nu - m\mu$ Coſinus anguli AVM, quem novæ Applicatæ cum Axe priori RS conſtituunt, & $\mu n + \nu m$ eſt Sinus hujus anguli AVM. Quod ſi ergo in æquatione inter x & y loco x & y illi valores inventi ſubſtituantur, prodibit æquatio inter Coordinatas obliquangulas r & s, quæ erit æquatio generaliſſima pro Curva LM.

46. Quoniam in valoribus, qui loco x & y ſubſtituuntur, novarum variabilium r & s unica ineſt dimenſio, manifeſtum eſt æquationem generaliſſimam ejuſdem eſſe ordinis, cujus erat æquatio

æquatio proposita inter x & y. Quomodocunque ergo æquatio ad eandem Curvam transformetur, mutatis utcunque tam Axe, & Abscissarum initio, quam inclinatione mutua Coordinatarum, tamen perpetuo æquatio ejusdem erit ordinis. Quanquam ergo æquatio inter Coordinatas, sive orthogonales sive obliquangulas, infinitis modis variari potest, ut ad eandem Curvam pertineat, tamen neque ad ordinem altiorem evehi, neque ad inferiorem deprimi poterit. Atque hanc ob causam æquationes diversi ordinis, utcunque alias fuerint affines, tamen semper Curvas diversas exhibebunt.

CAPUT III.

De Linearum curvarum algebraïcarum in ordines divisione.

47. Cum Linearum curvarum pariter ac Functionum varietas sit infinita, earum cognitio nullo modo acquiri poterit, nisi infinita multitudo in certas classes digeratur, hocque modo mens in earum scrutatione dirigatur atque adjuvetur. Divisimus jam quidem Lineas curvas in *algebraïcas* & *transcendentes*, verum utraque classis, ob infinitam Curvarum varietatem, ulteriori subdivisione opus habet. Hic autem tantum Curvas *algebraïcas* spectamus, quas quemadmodum commodissime in classes distribui conveniat, dispiciamus. Characteres igitur primum definiendi sunt, quibus classium varietates determinentur, ita ut quæ Curvæ eodem charactere sint præditæ, eæ ad eandem; quæ contra, ad diversas classes referantur.

48. Characteres ergo isti varias classes distinguentes aliunde, nisi ex Functionibus seu æquationibus, quibus Linearum curvarum natura continetur, peti nequeunt; cum, quia alia via ad Curvarum cognitionem perveniendi adhuc non patet; tum, quia nulla alia, quæ quidem datur, omnes Curvas algebraïcas

sub

Lib. II. ſub ſe complectitur. Functiones vero & æquationes inter binas Coordinatas pluribus modis in diverſa genera diſtribui poſſunt, uti fecimus in libro ſuperiori. Ac primo quidem Functionum multiformitas ſe offert, quæ ad Linearum curvarum in varias claſſes diſtributionem præ aliis apta videtur; unde hujuſmodi diviſio oriretur, ut eæ Lineæ curvæ, quæ ex Functionibus uniformibus oriuntur, ad genus primum, quæ ex biformibus ad ſecundum, quæ ex triformibus ad tertium referantur & ita porro.

49. Quamvis autem hæc diviſio videatur naturalis, tamen, ſi diligentius perpendatur, naturæ Linearum curvarum, earumque indoli minime conformis deprehendetur. Multiformitas enim Functionum ab Axis poſitione, quæ eſt arbitraria, potiſſimum pendet, ita ut, ſi pro uno Axe Applicata fuerit Functio uniformis Abſciſſæ, eadem, alio aſſumto Axe, Functio multiformis eſſe queat; hoc ergo modo eadem Linea curva in diverſis generibus occurreret, quod eſt contra inſtitutum. Sic enim Linea curva hac æquatione $a^3 y = aaxx - x^4$ expreſſa pertineret ad genus primum, quia Applicata y eſt Functio uniformis ipſius x; permutatis vero Coordinatis, ſeu Axe ſumto ad priorem normali, eadem Curva exprimitur æquatione $y^4 - aayy + a^3 x = 0$, ſicque ad genus quartum pertineret. Hanc igitur ob cauſam multiformitas Functionum ad characterem, quo Lineæ curvæ in claſſes diſtribuantur, conſtituendum admitti nequit.

50. Æque parum ſimplicitas æquationum naturam Linearum curvarum exprimentium, ratione numeri terminorum characterem diſtinctionis conſtituere poterit. Si enim eæ Curvæ ad genus primum referantur quarum æquatio conſtet duobus terminis, ut $y^m = \alpha x^n$, ad ſecundum quarum æquatio contineat tres terminos ut $\alpha y^m + \beta y^p \cdot x^q + \gamma x^n = 0$, & ita porro, manifeſtum eſt eandem Lineam curvam in pluribus generibus occurrere. Per exemplum enim §. 36. ſubjunctum Linea curva æquatione

æquatione $yy - ax = 0$ contenta ſimul ad genus primum & quartum referri deberet, quia, mutato Axe, etiam hac æquatione Cap. III.

$$16uu - 24tu + 9tt - 55au + 10at = 0,$$

exprimitur. Deberet vero etiam, aliter aſſumto Axe & Abſciſſarum initio, ſimul ad genus ſecundum, tertium, & quintum pertinere; ex quo iſta diviſio adhiberi omnino non poteſt.

51. Hæc incommoda evitabuntur ſi æquationum, quibus relatio inter Coordinatas exprimitur, ordines ad Curvarum claſſes conſtituendas adhibeantur. Cum enim pro eadem Linea curva, utcunque tam Axis & principium Abſciſſarum quam inclinatio Coordinatarum varietur, æquatio ejuſdem ſemper ordinis maneat; eadem Linea curva non ad diverſas claſſes referetur. Charactere ergo in numero dimenſionum, quas Coordinatæ, ſive orthogonales ſive obliquangulæ, in æquatione complent, conſtituto, neque Axis neque principii Abſciſſarum mutatio, neque inclinationis Coordinatarum variatio, claſſium conſtitutionem perturbabit. Atque eadem Curva, ſive æquatio inter Coordinatas ſpecialis quæque ſive generalis ſive etiam generaliſſima ſpectetur, ad eandem ſemper claſſem annumerabitur. Quam ob rem character diſtinctionis Linearum curvarum convenientiſſime ab ordine æquationum petitur.

52. Quoniam igitur hæc diverſa æquationum genera, quæ ex dimenſionum numero conſtituuntur, ordines vocavimus, diverſa quoque Linearum curvarum genera, quæ hinc oriuntur, ordinum nomine appellabimus. Cum ergo æquatio primi ordinis generalis ſit

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y$$

omnes Lineas curvas, quæ ſumtis x & y pro Coordinatis, ſive orthogonalibus ſive obliquangulis, ex hac æquatione proficiſcuntur, ad ordinem primum referemus. Supra autem vidimus in hac æquatione tantum Lineam rectam contineri, & hanc ob

 rem

LIB. II. rem primus ordo ſolam Lineam rectam in ſe complectitur, quæ utique inter omnes Lineas eſt ſimpliciſſima. Cum igitur nomen Curvæ huic primo ordini non conveniat, hos ordines non *Linearum curvarum*, ſed vocabulo latiori ſimpliciter *Linearum* vocabimus. Ordo ergo Linearum primus nullam Lineam curvam continet, ſed a ſola Linea recta exhauritur.

53. Perinde autem eſt ſive Coordinatæ ſtatuantur rectangulæ ſive obliquangulæ; quod ſi enim Applicatæ cum Axe faciant angulum ϕ, cujus Sinus ſit μ & Coſinus ν, æquatio ad Coordinatas orthogonales reducetur, ponendo $y = \frac{u}{\mu}$ & $x = \frac{\nu u}{\mu} + t$ (44), unde iſta inter Coordinatas orthogonales t & u, æquatio naſcitur

$$0 = \alpha + \beta t + \left(\frac{\beta\nu}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu}\right) u,$$

quæ cum non minus late pateat quam prior, utraque enim eſt generalis, manifeſtum eſt ſignificationem æquationis non reſtringi, etiamſi angulus, quem Applicatæ cum Axe faciant, rectus ſtatuatur. Hoc idem eveniet in æquationibus ſequentium ordinum generalibus, quæ non minus late patebunt, etſi Coordinatæ orthogonales ſtatuantur. Cum igitur æquatio generalis cujuſque ordinis per determinationem inclinationis Applicatarum ad Axem nihil de vi ſua perdat, ejus ſignificatum non reſtringemus, ſi Coordinatas orthogonales ſtatuamus. Quæcunque enim Linea curva in æquatione generali cujuſque ordinis continetur, ſumtis Coordinatis obliquangulis, eadem Linea curva in eadem æquatione continebitur, ſi Coordinatæ rectangulæ ſtatuantur.

54 Lineæ porro ſecundi ordinis omnes continebuntur in hac æquatione generali ordinis ſecundi.

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon x y + \zeta y^2$$

Omnes

Omnes ſcilicet Lineas curvas, quas hæc æquatio, denotantibus litteris x & y Coordinatas orthogonales, in ſe complectitur, ad ordinem Linearum ſecundum numeramus. Sunt igitur hæ Lineæ curvæ ſimpliciſſimæ, quia in ordine primo nulla Linea curva continetur, & hanc ob rem a quibuſdam Lineæ curvæ primi ordinis vocari ſolent. Lineæ vero iſtæ curvæ in hac æquatione contentæ ſub nomine *Sectionum conicarum* vulgo innotuerunt, quia eædem omnes ex ſectione Coni naſcuntur. Diverſæ harum Linearum ſpecies ſunt Circulus, Ellipſis, Parabola & Hyperbola, quas infra ex æquatione generali deducemus.

55. Ad tertium porro Linearum ordinem referuntur omnes Lineæ curvæ, quas ſequens æquatio tertii ordinis generalis ſuppeditat.

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + \kappa y^3$$

ſumtis x & y pro Coordinatis orthogonalibus, quia conditio obliquitatis Applicatarum ampliorem ſignificatum huic æquationi non inducit, ut jam notavimus. Quia in hac æquatione multo plures, quam in præcedente habentur litteræ conſtantes, quas pro arbitrio definire licet, etiam multo major ſpecierum diverſarum numerus in hoc ordine continetur, quarum enumerationem exhibuit NEWTONUS.

56. Ad quartum Linearum ordinem pertinent omnes Lineæ curvæ, quas hæc æquatio generalis quarti ordinis exhibet

$$\begin{aligned} 0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + \kappa y^3 \\ + \lambda x^4 + \mu x^3 y + \nu x^2 y^2 + \xi xy^3 + o y^4, \end{aligned}$$

ſumtis x & y pro Coordinatis orthogonalibus, quia obliquitas Applicatarum æquationi majorem generalitatem non inducit. Occurrunt ergo in hac æquatione quindecim quantitates conſtantes, pro arbitrio definiendæ, unde multo major ſpecierum diverſarum varietas in hoc ordine occurrit, quam in præcedente. Lineæ iſtæ quarti ordinis vocari etiam ſolent Lineæ

LIB. II. curvæ tertii ordinis, quia Linearum ordo ſecundus pro Linearum curvarum ordine primo reputatur; ſimilique modo Lineæ tertii ordinis conveniunt cum Lineis curvis ſecundi ordinis.

57. Ex his jam intelligitur, quænam Lineæ curvæ ad ordinem quintum, ſextum, ſeptimum & ſequentes pertineant. Æquatio autem generalis omnes Lineas quinti ordinis in ſe complectens, quia ad æquationem generalem quarti ordinis inſuper accedunt termini,

$$x^5\,;\; x^4y\,;\; x^3y^2\,;\; x^2y^3\,;\; xy^4\,;\; y^5$$

conſtabit omnino terminis viginti & uno, & æquatio generalis omnes Lineas ſexti ordinis continens habebit viginti & octo terminos, & ita porro ſecundum numeros trigonales. Scilicet æquatio generalis pro Lineis ordinis n continebit $\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ \ 2}$ terminos, totidemque in ea inerunt litteræ conſtantes, quas pro arbitrio definire licet.

58. Neque vero quælibet litterarum conſtantium diverſa determinatio diverſas Lineas curvas producit. Vidimus enim in præcedente Capite pro eadem Linea curva, mutatis Axe & Abſciſſarum initio, infinitas exhiberi poſſe æquationes diverſas; unde ex diverſitate æquationum ad eundem ordinem pertinentium non ſequitur Curvarum iis æquationibus indicatarum diverſitas. Quam ob rem in enumeratione generum ac ſpecierum ad eundem ordinem pertinentium, quæ ex æquatione generali deducitur, admodum cautum eſſe oportet, ne eadem Linea curva ad duas pluresve ſpecies referatur.

59. Cum igitur ex ordine æquationis, quæ inter Coordinatas datur, Lineæ curvæ ordo cognoſcatur, propoſita quacunque æquatione algebraïca inter Coordinatas x & y, ſtatim conſtabit, ad quemnam ordinem Linea curva illa æquatione indicata ſit referenda. Primum ſcilicet æquatio, ſi ſit irrationalis, ab irrationalitate liberari, tumque, ſi fractiones ſuperfuerint, ab his purgari debebit, quo facto maximus dimenſionum numerus,

numerus, quem variabiles x & y in ea conſtituunt, ordinem, ad quem Linea curva pertinet, indicabit. Sic Linea curva, quam hæc æquatio $yy - ax = 0$ dat, erit ordinis ſecundi: Linea curva autem in hac æquatione $yy = x\sqrt{(aa - xx)}$ (quæ ab irrationalitate liberata fit ordinis quarti) contenta erit ordinis quarti. Et Linea curva, quam hæc æquatio præbet $y = \frac{a^3 - axx}{aa + xx}$, erit ordinis tertii, quia æquatio a fractionibus liberata fit $aay + xxy = a^3 - axx$, in cujus termino xxy tres ſunt dimenſiones. Cap. III.

60. In una eademque autem æquatione plures Lineæ curvæ diverſæ contineri poſſunt, prout Applicatæ ad Axem vel normales vel ſub data obliquitate conſtitutæ ponuntur. Sic hæc æquatio $yy = aa - xx$, ſi Coordinatæ ponantur orthogonales, præbet Circulum, ſin autem Coordinatæ obliquangulæ ſtatuantur, tum Curva erit Ellipſis. Omnes tamen iſtæ Curvæ diverſæ ad eundem ordinem pertinent, quia reductione Coordinatarum obliquangularum ad rectangulas ordo Curvæ non mutatur. Quanquam ergo æquatio generalis pro Lineis curvis cujuſque ordinis ob angulum, quo Applicatæ Axi inſiſtunt, neque latius neque minus late patens redditur, tamen propoſita æquatione ſpeciali Linea curva in ea contenta non determinatur, niſi angulus quem Coordinatæ inter ſe conſtituunt, determinetur.

61. Quo Linea curva ad eum ordinem, quem æquatio indicat, proprie referatur, neceſſe eſt, ut æquatio in Factores rationales reſolvi nequeat. Si enim æquatio duos pluresve habeat Factores, tum duas pluresve involvet æquationes, quarum quælibet peculiarem Lineam curvam generabit, quæ junctim ſumtæ æquationis propoſitæ vim exhaurient. Hujuſmodi ergo æquationes in Factores reſolubiles non unam ſed plures Curvas continuas in ſe complectuntur, quarum quævis peculiari æquatione exprimi queat; & quæ aliter inter ſe non ſunt connexæ, niſi quod earum æquationes in ſe mutuo ſint multiplicatæ. Qui cum ſit nexus ab arbitrio noſtro pendens, ejuſ-

LIB. II. modi Lineæ curvæ non unam continuam Lineam conſtituere cenſeri poſſunt. Tales ergo æquationes, quas ſupra complexas vocavimus, producent Lineas curvas non continuas, attamen ex continuis compoſitas, quas propterea complexas vocabimus.

62. Sic hæc æquatio $yy = ay + xy - ax$, quæ ad Lineam ſecundi ordinis eſſe videtur, ſi ad nihilum reducatur, ut ſit $yy - ay - xy + ax = 0$, conſtabit ex his Factoribus $(y-x)(y-a) = 0$: complectitur ergo has duas æquationes $y - x = 0$ & $y - a = 0$, quarum utraque eſt pro linea recta, illa ſcilicet cum Axe in initio Abſciſſarum angulum ſemirectum conſtituit, hæc vero Axi ad diſtantiam $= a$ eſt parallela. Duæ ergo iſtæ lineæ rectæ ſimul conſideratæ in æquatione propoſita $yy = ay + xy - ax$ continentur. Simili modo hæc æquatio eſt complexa $y^4 - xy^3 - aaxx - ay^3 + axxy + aaxy = 0$ neque propterea Lineam continuam quarti ordinis exhibet, cum enim Factores ſint $(y-x)(y-a)(yy-ax)$ tres continebit lineas diſcretas, duas ſcilicet rectas & unam Curvam in æquatione $yy - ax = 0$ contentam.

63. Poſſunt ergo pro lubitu Lineæ complexæ quæcunque formari, quæ complectantur duas pluresve Lineas ſive rectas ſive curvas ad arbitrium deſcriptas. Quod ſi enim unius cujuſque Lineæ natura exprimatur per æquationem ad eundem Axem idemque Abſciſſarum initium relatam, hæque æquationes ſingulæ, poſtquam ad cyphram fuerint reductæ, in ſe multiplicentur, prodibit æquatio complexa, in qua omnes Lineæ aſ-
TAB. IV. Fig. 16. ſumtæ ſimul continentur. Ita, ſi propoſitus fuerit Circulus centro C & Radio $CA = a$ deſcriptus, ac præterea Linea recta LN per Centrum C tranſiens, æquatio pro quovis Axe exhiberi poterit, quæ Circulum & Lineam rectam, quaſi ambo unam Lineam conſtituerent, conjunctim complectatur.

64. Sumatur diameter AB, quæ cum recta LN angulum ſemirectum conſtituat pro Axe, ac ſumto initio Abſciſſarum in A, vocatiſque Abſciſſa $AP = x$, & Applicata $PM = y$, erit pro Linea recta $PM = CP = a - x$, & quia punctum

rect

rectæ M in regionem Applicatarum negativarum cadit, erit Cap. III.
$y = -a + x$, seu $y - x + a = 0$. Pro Circulo autem cum sit $PM^2 = AP.PB$, ob $BP = 2a - x$, erit $yy = 2ax - xx$ seu $yy + xx - 2ax = 0$. Multiplicentur jam hæ duæ æquationes in se invicem ac prodibit æquatio tertii ordinis complexa

$$y^3 - y^2x + yxx - x^3 + ayy - 2axy + 3axx - 2aax = 0,$$

quæ tam Circulum quam lineam rectam simul in se complectetur. Abscissæ scilicet $AP = x$ respondere invenientur tres Applicatæ, binæ Circuli & una rectæ: sit nimirum $x = \frac{1}{2}a$, fiet $y^3 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{3}{4}aay - \frac{3}{8}a^3 = 0$, unde fit primo $y + \frac{1}{2}a = 0$ tum divisione per hanc radicem instituta erit $yy - \frac{3}{4}aa = 0$, unde tres valores ipsius y erunt.

I. $y = -\frac{1}{2}a$;

II. $y = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$;

III. $y = -\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Quasi ergo Circulus cum recta LN unum continuum constituerit, ita in æquatione repræsentatur.

65. Notato hoc discrimine inter Curvas incomplexas & complexas, perspicuum est Lineas secundi ordinis vel esse Curvas continuas, vel ex duabus Lineis rectis complexas; si enim æquatio generalis habet Factores, hi erunt primi ordinis, ideoque Lineas rectas denotabunt. Lineæ autem tertii ordinis erunt vel incomplexæ, vel ex una recta & una Linea secundi ordinis complexæ, vel ex tribus Lineis rectis complexæ. Porro Lineæ quarti ordinis erunt vel continuæ seu incomplexæ, vel ex una Linea recta & una Linea tertii ordinis complexæ, vel ex duabus

LIB. II. bus Lineis ſecundi ordinis complexæ, vel ex Linea ſecundi ordinis una & duabus rectis vel denique ex quatuor Lineis rectis complexæ erunt. Similiter ratio Linearum complexarum ordinis quinti altiorumque ordinum eſt comparata parique modo enumerari poterit. Ex quo patet in quovis Linearum ordine ſimul omnes Lineas ordinum inferiorum comprehendi, neque vero ſimpliciter, ſed quælibet ordinum inferiorum complexa cum Linea vel Lineis rectis, vel cum Lineis ſecundi, tertii, ſequentiumve ordinum, ita tamen, ut ſi numeri ſingulorum ordinum ad quos Lineæ ſimplices pertinent in unam ſummam addantur, prodeat numerus, quo ordo Lineæ complexæ indicatur.

CAPUT IV.

De Linearum cujuſque ordinis præcipuis proprietatibus.

66. INter præcipuas proprietates Linearum cujuſque ordinis primum locum tenet earum concurſus cum Linea recta, ſeu interſectionum multitudo, quas Linea recta cum Lineis cujuſque ordinis facere poteſt. Cum enim Linea primi ordinis, ſeu recta, ab alia Linea recta nonniſi in unico puncto ſecari poſſit, Lineæ curvæ autem in pluribus punctis a Linea recta ſecari queant; merito ergo quæri ſolet in quot punctis Linea curva cujuſque ordinis ſecari poſſit a Linea recta utcunque ducta: ex ipſa enim hac quæſtione natura Linearum curvarum ad varios ordines pertinentium melius cognoſcetur. Reperietur autem Linea ſecundi ordinis a recta in pluribus quam duobus punctis ſecari non poſſe: Linea autem tertii ordinis a recta in pluribus quam tribus punctis ſecari nequit, & ita porro.

67. Supra jam mentionem fecimus modi, quo determinari poteſt in quot punctis Axis cujuſque Curvæ ab ipſa Curva ſecetur. Data enim æquatione inter Abſciſſam x & Applicatam

catam y, quia ubi Curvæ punctum in Axem incidit, ibi Applicata y fit $= 0$, ponatur in æquatione $y = 0$, atque æquatio resultans, quæ tantum x continebit, monstrabit valores ipsius x, hincque Axis puncta, ubi Curva ipsum secabit. Ita in æquatione pro Circulo, quam supra invenimus, $yy = 2ax - xx$, si ponamus $y = 0$, fit $0 = 2ax - xx$, unde duo valores ipsius x resultant, $x = 0$ & $x = 2a$, qui indicant Axem RS primo in ipso Abscissarum initio A, tum vero in puncto B, existente $AB = 2a$, a Circulo intersecari. Similique modo in aliis Lineis curvis, posito in æquatione $y = 0$, radices ipsius x indicabunt intersectiones Curvæ cum Axe. CAP. IV. TAB. IV. *Fig.* 16.

68. Quoniam in æquatione generali pro quavis Curva, Linea recta quæcunque vicem Axis sustinet, si in æquatione generali ponatur Applicata $y = 0$, æquatio remanens indicabit in quot punctis Linea curva a recta quacunque trajiciatur. Prodibit autem æquatio Abscissam solam x, tanquam incognitam, complectens, cujus singulæ radices ostendent intersectiones Curvæ cum Axe. Pendebit ergo intersectionum numerus a maxima ipsius x in æquatione potestate, hincque major esse non poterit quam exponens summæ ipsius x potestatis. Tot vero erunt intersectiones, quot exponens maximæ potestatis ipsius x continet unitates, si omnes radices æquationis fuerint reales, sin autem aliquot radices fuerint imaginariæ, intersectionum numerus tanto erit minor.

69. Cum igitur pro quovis Linearum ordine æquationes generalissimas exhibuerimus; ex iis, modo exposito, invenire poterimus, in quot punctis Lineæ cujusque ordinis a recta quacunque secari queant. Sumamus ergo æquationem pro Lineis primi ordinis seu pro Linea recta generalem, $0 = \alpha + \beta x + \gamma y$, ex qua, posito $y = 0$, fit $0 = \alpha + \beta x$, quæ æquatio plus una radice habere nequit, unde patet Lineam rectam ab alia recta in unico puncto secari. Sin autem sit $\beta = 0$, æquatio $0 = \alpha$ impossibilis indicat hoc casu Axem a Linea recta nusquam secari, erunt enim ambæ hæ Lineæ rectæ inter se parallelæ, uti patet ex æquatione $0 = \alpha + \gamma y$, quæ oritur si $\beta = 0$.

 70. Si

LIB. II. 70. Si in æquatione generali pro Lineis ſecundi ordinis

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \varepsilon xy + \zeta yy$$

ponamus $y = o$, prodibit hæc æquatio

$$o = \alpha + \beta x + \delta xx,$$

quæ æquatio vel duas habet radices reales, vel nullam, vel etiam unicam ſi $\delta = o$. Hinc Linea ſecundi ordinis a Linea recta vel in duobus punctis ſecabitur, vel in unico, vel nuſquam. Qui caſus omnes ſic in unum comprehendi poſſunt, ut dicamus Lineam ſecundi ordinis a Linea recta pluſquam in duobus punctis ſecari non poſſe.

71. Si in æquatione generali pro Lineis tertii ordinis ponamus $y = o$, prodibit hujuſmodi æquatio

$$o = \alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3,$$

quæ cum plures tribus radicibus habere nequeat, perſpicuum eſt Lineas tertii ordinis a Linea recta in pluribus quam tribus punctis ſecari non poſſe. Fieri vero poteſt ut Linea tertii ordinis a Linea recta in paucioribus punctis ſecetur, nempe vel in duobus, ſi $\delta = o$, & æquationis $o = \alpha + \beta x + \gamma xx$ ambæ radices fuerint reales; vel in unico ſi ſuperioris æquationis duæ radices fuerint imaginariæ, aut ſi ſit & $\delta = o$ & $\gamma = o$; vel etiam nuſquam ſi $\delta = o$ & reliquæ æquationis ambæ radices fuerint imaginariæ, quod idem evenit ſi β, γ, & δ evaneſcant, at α fuerit quantitas non æqualis nihilo.

72. Simili modo colligetur Lineas quarti ordinis a recta in pluribus quam quatuor punctis ſecari non poſſe; hæcque proprietas ad omnes Linearum ordines ita extendetur, ut Lineæ ordinis n a Linea recta in pluribus quam n punctis ſecari nequeant. Neque vero hinc ſequitur omnem Lineam ordinis n a quavis Linea recta in n punctis ſecari, ſed utique fieri poteſt ut numerus interſectionum ſit minor, imo ſubinde prorſus nullus, uti de Lineis ſecundi & tertii ordinis annotavimus. In

hoc

hoc ergo tantum propoſitionis vis eſt poſita, quod interſectionum numerus major nunquam eſſe poſſit, quam exponens ordinis ad quem Linea curva refertur. Cap. IV.

73. Ex numero igitur interſectionum, quas Linea recta quæcunque cum data Linea curva facit, ordo ad quem Linea curva pertineat, definiri non poterit. Si enim interſectionum numerus ſit $= n$, non ſequitur Curvam ad ordinem Linearum n pertinere, ſed ad quemvis ordinem ſuperiorem æque referri poterit: quin etiam fieri poteſt ut Curva ne quidem ſit algebraïca ſed tranſcendens. Excludendo autem ſemper tuto affirmari poteſt, Lineam curvam, quæ a recta in n punctis ſecetur, ad nullum Linearum ordinem inferiorem pertinere poſſe. Sic, ſi propoſita Linea curva a recta in quatuor punctis ſecetur, certum eſt, eam neque ad ordinem ſecundum, neque tertium referri; utrum autem in ordine quarto, aut ſuperiori quopiam contineatur, an ſit tranſcendens, hinc dijudicari non poteſt.

74. Æquationes generales, quas pro Lineis cujuſque ordinis exhibuimus, plures continent quantitates conſtantes arbitrarias, quibus ſi valores determinati tribuantur, Lineæ curvæ penitus determinabuntur, atque ad datum Axem ita deſcribentur, ut reliquæ Lineæ curvæ omnes, quæ quidem in eadem æquatione generali continebantur, excludantur. Ita, quamvis in æquatione primi ordinis $0 = \alpha + \beta x + \gamma y$ ſola Linea recta contineatur; tamen ejus poſito reſpectu Axis infinitis modis variari poteſt, pro diverſis infinitis valoribus quantitatum conſtantium α, β, γ. Quamprimum autem his quantitatibus conſtantibus definiti valores tribuuntur, poſitio Lineæ rectæ determinatur, ut præter hanc nulla alia æquationi ſatisfacere queat.

75. Hæc igitur æquatio $0 = \alpha + \beta x + \gamma y$ tres determinationes admittere videri poſſet, ob tres conſtantes arbitrarias α, β, & γ. Verum ex natura æquationum intelligitur æquationem jam determinari, ſi tantum ratio inter has conſtantes definiatur, ſcilicet ratio binarum ad unam; ex quo iſta æquatio duas tantum admittet determinationes. Si enim β & γ

E 2 per

LIB. II. per α ita determinentur ut ſit $\beta = -\alpha$ & $\gamma = 2\alpha$, æquatio $0 = \alpha - \alpha x + 2\alpha y$, quia α per diviſionem exit, jam prorſus erit determinata. Similem ob rationem æquatio generalis pro Lineis ſecundi ordinis, quæ ſex continet conſtantes arbitrarias, quinque tantum admittit determinationes, æquatio generalis pro Lineis tertii ordinis novem; & generaliter æquatio generalis pro Lineis ordinis n patietur $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ determinationes.

76. Semper autem iſtæ conſtantes arbitrariæ ita definiri poſſunt ut Linea curva per datum punctum tranſeat, hocque
TAB. IV. modo una determinatio orietur. Sit enim propoſita æquatio
Fig. 17. generalis pro quovis ordine Linearum, quæ ita definiri debeat, ut Linea curva per datum punctum B tranſeat. Sumto pro lubitu Axe, in eoque Abſciſſarum initio A, demittatur ex puncto B in Axem perpendicularis Bb, atque manifeſtum eſt, ſi Curva tranſeat per punctum B, tum poſito intervallo Ab pro x, perpendicularem Bb præbere valorem Applicatæ y. Quare in æquatione generali propoſita, loco x ſubſtituatur Ab, & Bb loco y, ſicque orietur æquatio, ex qua una quantitatum conſtantium $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c., definiri poterit; quo facto omnes Curvæ, quæ in æquatione generali hoc modo determinata continentur, per punctum datum B tranſibunt.

77. Si Linea curva inſuper per punctum C tranſire debeat, inde ad Axem perpendiculo Cc demiſſo, & in æquatione poſito $x = Ac$ & $y = Cc$, nova orietur æquatio ex qua pariter una ex quantitatibus conſtantibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c., definietur. Eodem modo intelligitur ſi tria puncta B, C, D præſcribantur, per quæ Linea curva tranſire debeat, inde tres conſtantes definiri; ex quatuor autem punctis B, C, D, E quatuor litteras conſtantes determinationem accipere. Quòd ſi ergo tot puncta, per quæ Linea curva tranſeat, proponantur quot determinationes æquatio generalis admittit, tum Linea curva penitus erit determinata, ideoque unica, quæ quidem per omnia puncta propoſita tranſeat.

78. Cum

78. Cum igitur æquatio generalis pro Lineis primi ordinis, ſeu pro Linea recta, duas tantum determinationes admittat, propoſitis duobus punctis, per quæ Linea primi ordinis, ſeu recta, tranſeat, Linea recta penitus determinatur; neque per duo puncta data plures quam una Linea recta duci poterunt, quod quidem ex Elementis intelligitur. Sin autem unum tantum proponeretur punctum, tum, ob æquationem nondum determinatam, adhuc infinitæ Lineæ rectæ per idem punctum duci poſſunt. CAP. IV.

79. Æquatio generalis pro Lineis ſecundi ordinis quinque admittit determinationes; unde ſi quinque proponantur puncta, per quæ Linea curva tranſire debeat, Linea ſecundi ordinis penitus determinatur. Hanc ob rem per quinque data puncta unica Linea ſecundi ordinis duci poteſt; ſin autem quatuor tantum vel pauciora puncta proponantur, quia iis æquatio nondum penitus determinatur, innumerabiles Lineæ, quæ omnes ſint ordinis ſecundi per ea duci poterunt. Quod ſi autem quinque illorum punctorum tria in directum jaceant, quia Linea ſecundi ordinis a recta in tribus punctis ſecari nequit, nulla Linea curva continua reperietur, ſed prodibit Linea complexa, duæ nempe Lineæ rectæ, quæ, uti jam monuimus, in æquatione generali ſecundi ordinis continentur.

80. Quia porro æquatio generalis pro Lineis tertii ordinis novem determinationes admittit, per novem puncta pro libitu aſſumta Linea tertii ordinis ſemper duci poterit, atque unica. Sin autem numerus punctorum novenario fuerit minor, tum per ea innumerabiles Lineæ tertii ordinis duci poterunt. Simili modo per quatuordecim puncta data unica Linea quarti ordinis, per viginti puncta unica Linea quinti ordinis duci poterit, & ita porro. Atque in genere Lineæ ordinis n determinabuntur per tot puncta quot hæc formula $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ continet unitates; ita ut, ſi numerus pun-

LIB. II. ctorum datorum fuerit minor, per ea puncta innumerabiles Lineæ ordinis n duci queant.

81. Nisi ergo plura puncta, quam $\frac{n(n+3)}{2}$, proponantur, semper una vel infinitæ Lineæ ordinis n per ea duci poterunt: unica scilicet, si numerus punctorum datorum fuerit $= \frac{n(n+3)}{2}$, & infinitæ, si sit minor. Nunquam autem, utcunque hæc puncta fuerint disposita, solutio evadet impossibilis; determinatio enim coëfficientium α, β, γ, δ, &c., nunquam resolutionem æquationis quadraticæ vel altioris potestatis requirit, sed tota per æquationes simplices absolvetur. Ex quo neque unquam valores imaginarii pro quantitatibus α, β, γ, &c., reperientur, neque valores multiformes; hancque ob caussam semper Linea realis per proposita puncta transiens prodibit; atque unica, si quidem tot puncta proponantur, quot determinationes æquatio generalis admittit.

82. Quoniam Axis pro lubitu assumi potest, ista coëfficientium determinatio facilior fiet, si Axis per unum punctorum datorum ducatur, atque initium Abscissarum in ipso hoc puncto A statuatur; sic enim posito $x = 0$ fieri debebit $y = 0$, unde in æquatione generali proposita

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \&c.,$$

statim fit $\alpha = 0$. Deinde Axis quoque per aliud punctum datorum transire poterit, quo pacto numerus quantitatum, quibus positio punctorum datorum definitur, minuetur. Denique, loco Applicatarum orthogonalium ejusmodi obliquangulæ eligi possunt, ut Applicata in initio Abscissarum ducta pariter per punctum datum transeat. Curvæ enim cognitio & constructio ex æquatione æque facile deducitur, sive Applicatæ orthogonales sive obliquangulæ statuantur.

TAB. IV. Fig. 18. 83. Si quæratur Linea secundi ordinis quæ per quinque data puncta A, B, C, D, & E transeat, ducatur Axis per duo puncta

puncta A, B: sumaturque initium Abscissarum in altero puncto A. Tum jungatur hoc punctum A cum tertio C, sumaturque angulus CAB pro obliquitate Applicatarum. Quare ex reliquis punctis D & E ad Axem ducantur Applicatæ Dd & Ee illi AC parallelæ. Ponatur $AB = a$; $AC = b$; $Ad = c$; $Dd = d$; $Ae = e$, & $eE = f$; atque sumta æquatione generali Linearum secundi ordinis CAP. IV.

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2$$

manifestum est

posito	fore
$x = o$	$y = o$
$x = o$	$y = b$
$x = a$	$y = o$
$x = c$	$y = d$
$x = e$	$y = f$

Hinc orientur sequentes quinque æquationes

I. $o = \alpha$
II. $o = \alpha + \gamma b + \zeta b^2$
III. $o = \alpha + \beta a + \delta a^2$
IV. $o = \alpha + \beta c + \gamma d + \delta c^2 + \varepsilon cd + \zeta d^2$
V. $o = \alpha + \beta e + \gamma f + \delta e^2 + \varepsilon ef + \zeta f^2$

Erit ergo $\alpha = o$; $\gamma = -\zeta b$; $\beta = -\delta a$, qui valores in reliquis substituti dant

$$o = -\delta ac - \zeta bd + \delta cc + \varepsilon cd + \zeta dd$$
$$o = -\delta ae - \zeta bf + \delta ee + \varepsilon ef + \zeta ff$$

multiplicentur superior per ef & inferior per cd & altera ab altera subtrahatur, ut eliminetur ε, ac proveniet

$$o = -\delta acef - \zeta bdef + \delta ccef + \zeta ddef$$
$$+ \delta acde + \zeta bcdf - \delta cdee - \zeta cdff$$

seu

$\frac{\delta}{\zeta}$

$$\frac{\delta}{\zeta} = \frac{bdef - bcdf - ddef + cdff}{acde - acef - cdee + ccef},$$

unde fit

$$\delta = df(be - bc - de + cf)$$
$$\zeta = ce(ad - af - de + cf)$$

hincque omnes coëfficientes determinabuntur.

84. Determinatis autem hoc modo omnibus coëfficientibus æquationis generalis $0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \&c.$, ſuper Axe aſſumto & ſub conſtituta Applicatarum obliquitate, Linea curva deſcribetur per puncta infinita per æquationem invenienda, hæcque Linea curva tranſibit per omnia puncta propoſita. Si æquatio generalis plures admittat determinationes quam fuerint puncta propoſita, tum reliquis pro lubitu aſſumtis Linea curva per ſingula puncta data deſcribetur ope æquationis omnino determinatæ. Tribuuntur autem Abſciſſæ x ſucceſſive plures valores tam affirmativi quam negativi ut 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., & -1, -2, -3, -4, &c., ac pro ſingulis ex æquatione inveſtigantur valores Applicatæ y convenientes, ſicque plurima innoteſcunt puncta ſatis vicina, per quæ Curva tranſibit, ex quibus proinde tractus Curvæ facile perſpicietur.

CAPUT

CAPUT V.

Cap. V.

De Lineis ſecundi Ordinis.

85. Quia in Linearum ordine primo ſola Linea recta continetur cujus indoles jam ſatis ex Geometria elementari conſtat, Lineas SECUNDI ORDINIS aliquanto diligentius contemplemur, quod eæ inter omnes Lineas curvas ſint ſimpliciſſimæ, atque per totam Geometriam ſublimiorem uſum habeant ampliſſimum. Præditæ autem ſunt iſtæ Lineæ, quæ etiam SECTIONES CONICÆ vocantur, plurimis inſignibus proprietatibus, quas cum antiquiſſimi Geometræ eruerunt, tum recentiores amplificarunt. Harumque proprietatum cognitio adeo neceſſaria judicatur, ut a pleriſque Auctoribus ſtatim poſt Geometriam elementarem explicari ſoleant. Quoniam vero iſtæ proprietates omnes non ex uno principio derivari poſſunt, ſed alias æquatio patefecit, alias generatio ex Sectione Coni, alias denique alii deſcribendi modi, hic tantum eas proprietates inveſtigabimus, quas æquatio ſola ſine aliis ſubſidiis ſuppeditat.

86. Conſideremus ergo æquationem generalem pro Lineis ſecundi ordinis, quæ eſt

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta yy,$$

quam æquationem ita comparatam eſſe oſtendimus, ut, quocunque angulo Applicatæ ad Axem inclinatæ ſtatuantur, ea tamen ſemper omnes Lineas ſecundi Ordinis in ſe complectatur. Tribuatur jam iſti æquationi hæc forma

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)y}{\zeta} + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0,$$

ex qua patet cuique Abſciſſæ x reſpondere vel duas Applica-

LIB. II. tas y, vel nullam, prout binæ radices ipſius y fuerint vel reales vel imaginariæ. Quod ſi autem fuerit $\zeta = 0$ tum unica quidem Applicata ſingulis Abſciſſis reſpondebit, altera abeunte in infinitum, quam ob rem iſte caſus noſtram indagationem non turbabit.

TAB. V. Fig. 19. 87. Quoties autem ambo ipſius y valores fuerint reales; id quod evenit, ſi Applicata PMN Curvam in duobus punctis M & N interſecat, erit ſumma radicum $PM + PN = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{\zeta} = \frac{-\varepsilon . AP - \gamma}{\zeta}$, ſumta recta AEF pro Axe, A pro initio Abſciſſarum, & angulo APN, quo Applicatæ Axi inſiſtunt, poſito obliquo pro lubitu. Quod ſi ergo ſub eodem angulo ducatur quævis alia Applicata npm, cujus quidem valor pm eſt negativus, erit eodem modo $pn - pm = \frac{-\varepsilon . Ap - \gamma}{\zeta}$. Subtrahatur hæc æquatio a priori, erit $PM + pm + PN - pn = \frac{\varepsilon (Ap - AP)}{\zeta} = \frac{\varepsilon . Pp}{\zeta}$. Ducantur ex punctis m & n rectæ Axi parallelæ, donec priori Applicatæ occurrant in punctis μ & ν, eritque $M\mu + N\nu = \frac{\varepsilon . Pp}{\zeta}$, ſeu ſumma $M\mu + N\nu$ ad Pp ſeu $m\mu$ ſeu $n\nu$ rationem habebit conſtantem ut ε ad ζ. Ratio ſcilicet hæc perpetuo erit eadem, ubicunque in Curva ducantur rectæ MN & mn, dummodo cum Axe datum faciant angulum, atque rectæ $n\nu$ & $m\mu$ Axi parallelæ ducantur.

TAB. V. Fig. 20. 88. Si Applicata PMN eo promoveatur, quo puncta M & N coincidant, tum Applicata tanget Curvam; ubi enim duæ interſectiones conveniunt, ibi Linea ſecans abit in tangentem. Sit igitur KCI ejuſmodi tangens, cui ducantur parallelæ quotcunque rectæ MN, mn, Curvæ utrinque occurrentes, cujuſmodi rectæ vocari ſolent CHORDÆ & ORDINATÆ. Tum ex punctis M, N, m, n ad tangentem producantur rectæ MI, NK; & mi, nk Axi prius aſſumto parallelæ. Quia nunc intervalla CK, Ck ad contrariam puncti C partem cadunt, negative

negative capi debebunt. Hinc erit $CI - CK : MI = \varepsilon : \zeta$ CAP. V.
& $Ci - Ck : mi = \varepsilon : \zeta$; ideoque $CI - CK : MI = Ci - Ck : mi$ seu $MI : mi = CI - CK : Ci - Ck$.

89. Quia positio Axis respectu Curvæ est arbitraria, rectæ MI, NK, mi, nk pro lubitu duci poterunt, dummodo inter se fuerint parallelæ: eritque semper $MI : mi = CI - CK : Ci - Ck$. Quod si ergo rectæ parallelæ MI & NK ita ducantur ut fiat $CI = CK$; quod evenit si parallelæ MI & NK statuantur rectæ CL, quæ ex contactu C ducta Ordinatam MN in L bisecat: tum, ob $CI - CK = 0$, fiet quoque $Ci - Ck = \frac{mi}{MI}(CI - CK) = 0$. Quare producta recta CL in l, quia, ob mi & nk pariter ipsi CL parallelas, est $ml = Ci$ & $nl = Ck$, erit $ml = nl$. Unde sequitur rectam CLl, quæ ex puncto contactus C ducta unam Ordinatam MN tangenti parallelam bisecat, eandem omnes Ordinatas mn eidem tangenti parallelas bifariam secare.

90. Cum igitur recta CLl omnes Ordinatas tangenti ICK parallelas in duas partes æquales secet, hæc Linea CLl vocari solet DIAMETER *Lineæ secundi ordinis* seu *Sectionis conicæ*. Hinc innumerabiles in unaquaque Linea secundi Ordinis duci possunt Diametri, quia in singulis punctis Curvæ datur tangens. Ubicunque enim data fuerit tangens ICK, ducatur una quævis Ordinata MN hinc tangenti parallela, qua in L bisecta, erit recta CL Diameter Lineæ secundi ordinis, omnes Ordinatas tangenti IK parallelas bifariam secans.

91. Ex his etiam sequitur, si recta Ll duas quasvis parallelas Ordinatas MN & mn bisecet, eandem esse omnes reliquas Ordinatas illis parallelas bisecturam: dabitur enim alicubi recta Curvam tangens IK his Ordinatis parallela, ideoque dabitur Diameter. Hinc nova habetur methodus in data Linea secundi ordinis innumerabiles Diametros inveniendi; ducantur enim pro lubitu duæ Ordinatæ seu Chordæ MN & mn inter se parallelæ, quibus bisectis in L & l, recta per hæc puncta ducta omnes reliquas Ordinatas illis parallelas pariter bisecabit, eritque

 propterea

LIB. II. propterea Diameter. Atque ubi Diameter producta Curvam secat in C, per id recta IK Ordinatis parallela ducta Curvam in puncto C tanget.

TAB. V. Fig. 19. 92. Ad hanc proprietatem nos manuduxit consideratio summæ binarum radicum ipsius y ex æquatione

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)}{\zeta} y + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0.$$

Ex eadem vero æquatione constat fore productum ambarum radicum $PM.\,PN = \frac{\delta xx + \beta x + \gamma}{\zeta}$, quæ expressio $\frac{\delta xx + \beta x + \gamma}{\zeta}$ vel duos Factores habet simplices reales vel secus. Illud evenit si Axis Curvam in duobus punctis E & F secet, quia enim his in locis fit $y = 0$, erit $\frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0$, hincque radices ipsius x erunt AE & AF, atque adeo Factores $(x - AE)(x - AF)$ ita ut sit $\frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = \frac{\delta}{\zeta}(x - AE)(x - AF) = \frac{\delta}{\zeta}.\,PE.\,PF$ ob $x = AP$. Hanc ob rem ergo erit $PM.\,PN = -\frac{\delta}{\zeta}.\,PE.\,PF$: seu rectangulum $PM.\,PN$ ad rectangulum $PE.\,PF$ constantem habebit rationem ut δ ad ζ ubicunque Applicata PMN ducatur, dummodo sit angulus NPF assumto, quo Applicatæ ad Axem inclinari ponuntur, æqualis. Erit ergo simili modo, si ducatur Applicata mn ob Ep & pm negativas $pm.\,pn = -\frac{\delta}{\zeta}\,pE.\,pF$.

TAB. V. Fig. 21. 93. Ducta ergo recta quacunque PEF Lineam secundi ordinis secante in duobus punctis E, F, si ad eam parallelæ ducantur Ordinatæ quotcunque NMP, npm, erit semper $PM.\,PN : PE.\,PF = pm.\,pn : pE.\,pF$, utraque enim hujus proportionis ratio æquatur $\delta : \zeta$. Simili modo si, quia Axis positio est arbitraria, recta PMN sumatur pro Axe, atque ipsi PEF alia quæcunque parallela ducatur eqf, erit quoque $PM.$

PN:

$PN : PE . PF = qM . qN : qe : qf = pm . pn : pE . pF$. Ergo alternando $qe . qf . pE . pF = qM . qN : pm . pn$. Datis igitur duabus Ordinatis parallelis ef & EF, si aliæ quæcunque duæ Ordinatæ inter se parallelæ MN & mn ducantur, illas secantes in punctis P, p, q, r, erunt hæ rationes omnes inter se æquales. $PM . PN : PE . PF = pm . pn : pE . pF = qM . qN : qe . qf = rm . rn : re . rf$. Quæ est altera proprietas generalis Linearum secundi ordinis. CAP. V.

94. Si igitur duo Curvæ puncta M & N coincidant, recta PMN fiet Curvæ tangens in concursu illorum duorum punctorum, abibitque rectangulum $PM . PN$ in quadratum ipsius PM vel PN, unde nova tangentium proprietas obtinebitur. Tangat nimirum recta CPp Lineam secundi ordinis in puncto C, & ducantur lineæ quotvis PMN, pmn inter se parallelæ, quæ ergo omnes cum tangente eundem angulum constituant. Ex proprietate igitur ante inventa erit TAB. VI. Fig. 24.

$$PC^2 : PM . PN = pC^2 : pm . pn ,$$

seu quæcunque Ordinata MN ad tangentem sub angulo dato ducatur, erit semper quadratum rectæ CP ad rectangulum $PM \times PN$ in ratione constante.

95. Indidem etiam sequitur, si Lineæ secundi ordinis ducatur Diameter quæcunque CD, omnes Ordinatas MN, mn inter se parallelas bifariam secans, atque ipsa Diameter Curvæ occurrat in punctis duobus C & D, fore TAB. V. Fig. 20.

$$CL . LD : LM . LN = Cl . lD : lm . ln .$$

Cum autem sit $LM = LN$, & $lm = ln$, erit $LM^2 : lm^2 = CL . LD : Cl . lD$, seu perpetuo erit quadratum semiordinatæ LM ad rectangulum $CL . LD$ in ratione constante. Hinc sumta Diametro CD pro Axe, & semiordinatis LM pro Applicatis, reperietur æquatio pro Lineis secundi ordinis. Sit enim Diameter $CD = a$, Abscissa $CL = x$ & Applicata $LM = y$, ob $LD = a - x$ erit, y^2 ad $ax - xx$ in ratione

 constante

Lib. II. constante, quæ sit ut h ad k, unde orietur ista pro Lineis secundi ordinis æquatio $yy = \frac{h}{k}(ax - xx)$.

96. Ex ambabus autem jam inventis Linearum secundi Ordinis proprietatibus conjunctim aliæ erui poterunt proprietates.

Tab. V. Fig. 22. Dentur in Linea secundi ordinis duæ Ordinatæ inter se parallelæ AB & CD, & compleatur quadrilaterum $ACDB$, quod si jam per punctum quodcunque Curvæ M ducatur Ordinata MN illis AB & CD parallela secans rectas AC & BD in punctis P & Q, erunt partes PM & QN inter se æquales. Nam recta, quæ bisecat Ordinatas duas AB & CD inter se parallelas, bisecabit quoque Ordinatam MN: at, per Geometriam elementarem, eadem recta bisecans latera AB & CD quoque bisecabit portionem PQ. Cum igitur lineæ MN & PQ in eodem puncto bisecentur, necesse est ut sit $MP = NQ$ & $MQ = NP$. Dato ergo, præter quatuor Lineæ secundi ordinis puncta A, B, C, & D, quinto M ex eo reperietur sextum N, sumto $NQ = MP$.

97. Cum jam sit $MQ.QN$ ad $BQ.DQ$ in ratione constante, ob $QN = MP$ erit quoque $MP.MQ$ ad $BQ.DQ$ in eadem ratione constante. Scilicet, si aliud quodcunque Curvæ punctum, uti c, sumatur, & per id recta GcH ipsis AB, & CD parallela ducatur donec lateribus AC, BD occurrat in punctis G & H, erit quoque $cG.cH$ ad $BH.DH$ in eadem ratione constante, ideoque $cG.cH : BH.DH = MP.MQ : BQ.DQ$. Quod si autem per M basi BD parallelæ ducatur RMS Ordinatis parallelis AB, CD occurrens in R & S, erit, ob $BQ = MR$ & $DQ = MS$, hæc quoque ratio $MP.MQ : MR.MS$ constans. Si igitur per quodvis Curvæ punctum M duæ ducantur rectæ, altera MPQ lateribus oppositis AB, CD parallela, altera vero RMS basi BD parallela, intersectiones P, Q, R, & S ita erunt comparatæ, ut sit $MP.MQ$ ad $MR.MS$ in ratione constante.

98. Si loco Ordinatæ CD, quæ posita est ipsi AB parallela, ex puncto D alia quæcunque Dc in ejus locum substituatur,

tituatur, & Chorda Ac jungatur: ita ut nunc rectæ MQ & RMS, ductæ, ut ante, per M lateribus AB & BD parallelæ, latera quadrilateri $ABDc$ secent in punctis p, Q, R & s; similis proprietas locum habebit. Cum enim sit $MP.MQ : BQ \times DQ = cG.cH : BH.DH$ seu $MP.MQ : MR.MS = cG.cH : BH.DH$, ob rectam RS ipsi BD parallelam & æqualem. Triangula vero similia APp, AGc & DSs, cHD, præbent has proportiones $Pp : AP = Gc : AG$; seu, ob $AP : AG = BQ : BH$, hanc $Pp : BQ = Gc : BH$: altera similitudo dat hanc $DS\ (MQ) : Ss = cH : DH$, quibus conjunctis fit CAP. V.

$$MQ.Pp : MR.Ss = cG.cH : BH.DH,\ \text{ob}\ BQ = MR.$$

Hæc proportio cum superiori collata præbet

$$MP.MQ : MR.MS = Pp.MQ : MR.Ss,$$

unde addendo antecedentes & consequentes fit

$$MP.MQ : MR.MS = Mp.MQ : MR.Ms,$$

ubicunque ergo sumantur puncta c & M in Curva, erit semper ratio $Mp.MQ$ ad $MR.Ms$ eadem, dummodo rectæ MQ & Rs per M ducantur Chordis AB & BD parallelæ. Ex superiore vero proportione sequitur fore $MP : MS = Mp : Ms$. Cum igitur, variato puncto c, tantum puncta p & s mutentur, erit Mp ad Ms in data ratione, utcunque punctum c varietur, dum punctum M fixum servatur.

99. Quod si quatuor quæcunque puncta A, B, C, D in Linea secundi ordinis fuerint data, eaque jungantur rectis, ut habeatur trapezium inscriptum $ABDC$, proprietas Sectionum conicarum latissime patens ex præcedenti deducitur. Scilicet, si ex Curvæ puncto quovis M ad singula trapezii latera sub datis angulis ducantur rectæ MP, MQ, MR & MS, erunt semper rectangula binarum harum linearum ad opposita latera ductarum inter se in data ratione, nempe erit $MP.MQ$ TAB. VI. Fig. 23.

ad

LIB. II. ad $MR.MS$ in data ratione eadem, ubicunque punctum M in Curva capiatur, dummodo anguli ad P, Q, R, & S iidem serventur. Ad hoc ostendendum ducantur per M duæ rectæ Mq & rs, illa lateri AB hæc lateri BD parallela, ac notentur intersectionum cum lateribus trapezii puncta p, q, r, & s: eritque per prius inventum $Mp.Mq$ ad $Mr.Ms$ in data ratione. Propter omnes autem angulos datos datæ erunt rationes $MP : Mp$, $MQ : Mq$, $MR : Mr$, & $MS : Ms$, ex quibus sequitur fore $MP.MQ$ ad $MR.MS$ in data quoque ratione.

TAB. VI. Fig. 24. 100. Quoniam supra vidimus, si Ordinatæ parallelæ MN, mn producantur, quoad tangenti cuipiam CPp occurrant in P & p, fore $PM.PN : CP^2 = pm.pn : Cp^2$. Quare, si puncta L & l notentur, ut sit PL media proportionalis inter PM & PN, pariterque pl media proportionalis inter pm & pn, erit $PL^2 : CP^2 = pl^2 : Cp^2$; ideoque erit $PL : CP = pl : Cp$, unde patet omnia puncta L, l in Linea recta per punctum contactus C transeunte esse sita. Quare, si una Applicata PMN ita secetur in L ut sit $PL^2 = PM.PN$, recta CLD per puncta C & L ducta omnes reliquas Applicatas pmn ita quoque secabit in l ut sit pl media proportionalis inter pm & pn. Vel, si duæ Applicatæ PN & pn ita in punctis L & l secentur, ut sit $PL^2 = PM.PN$ & $pl^2 = pm.pn$ recta per L & l producta per punctum contactus C transibit, atque omnes reliquas Applicatas illis parallelas in eadem ratione secabit.

TAB. VI. Fig. 25. 101. His Linearum secundi ordinis proprietatibus, quæ ex forma æquationis immediate consequuntur, expositis; progrediamur ad alias magis reconditas investigandas. Sit igitur proposita æquatio pro his Lineis secundi ordinis generalis

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)}{\zeta} y + \frac{\delta xx + 6x + \alpha}{\zeta} = 0,$$

ex qua cum cuivis Abscissæ $AP = x$, duplex Applicata y nempe

nempe PM & PN respondeat, positio Diametri omnes Ordinatas MN bifariam secantis definiri potest. Sit enim IG ista Diameter, quæ Ordinatam MN secabit in puncto medio L, quod ergo punctum est in Diametro. Ponatur $PL = z$; &, cum sit $z = \frac{1}{2} PM + \frac{1}{2} PN$, erit $z = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{2\zeta}$, seu $2\zeta z + \varepsilon x + \gamma = 0$, quæ est æquatio positionem Diametri IG præbens. CAP. V.

102. Hinc porro longitudo Diametri IG definiri poterit, quæ dat loca bina in Curva, ubi puncta M & N coincidunt, seu ubi fit $PM = PN$. Ex æquatione vero dantur $PM + PN = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{\zeta}$ & $PM.PN = \frac{\delta xx + 6x + \alpha}{\zeta}$, unde fit $(PM - PN)^2 = (PM + PN)^2 - 4PM.PN = \frac{(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)xx + 2(\varepsilon\gamma - 26\zeta)x + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}{\zeta\zeta} = 0$, seu $xx - \frac{2(26\zeta - \varepsilon\gamma)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}x + \frac{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta} = 0$, cujus æquationis propterea radices sunt AK & AH ita ut sit $AK + AH = \frac{46\zeta - 2\varepsilon\gamma}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ & $AK.AH = \frac{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$: hinc fit $(AH - AK)^2 = KH^2 = \frac{4(26\zeta - \varepsilon\gamma)^2 - 4(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}{(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)^2}$.

At est $IG^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon + 4\zeta\zeta}{4\zeta\zeta} KH^2$, si quidem Applicatæ ad Axem normales statuantur.

103. Sint istæ Applicatæ, quas hic sumus contemplati, normales ad Axem AH; nunc vero hinc quæramus æquationem pro Applicatis obliquangulis. Ducatur ergo ex quovis Curvæ puncto M ad Axem Applicata obliquangula Mp faciens cum Axe angulum MpH, cujus Sinus sit $= \mu$ & Cosinus $= \nu$. Sit nova Abscissa $Ap = t$, Applicata $pM = u$, erit $\frac{y}{u} = \mu$ & $\frac{Pp}{u} = \nu$, unde erit $y = \mu u$ & $x = t + \nu u$, qui valores

LIB. II. in æquatione inter x & y, quæ erat $0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \varepsilon xy + \zeta yy$, ſubſtituti præbent

$$0 = \alpha + \beta t + \nu\beta u + \delta tt + 2\nu\delta tu + \nu\nu\delta uu + \mu\gamma u + \mu\varepsilon tu + \mu\nu\varepsilon uu + \mu\mu\zeta uu$$

ſeu

$$uu + \frac{((\mu\varepsilon + 2\nu\delta)t + \mu\gamma + \nu\beta)u + \delta tt + \beta t + \alpha}{\mu\mu\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu\nu\delta} = 0.$$

104. Hic ergo iterum quævis Applicata duplicem habebit valorem, nempe pM & pn: quare Ordinatarum Mn Diameter ilg pari modo ut ante definietur. Scilicet, biſecta Ordinata Mn in l erit l, punctum in Diametro. Ponatur ergo $pl = v$, erit $v = \frac{pM + pn}{2} = \frac{-(\mu\varepsilon + 2\nu\delta)t - \mu\gamma - \nu\beta}{2(\mu\mu\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu\nu\delta)}$. Demittatur ex l in Axem AH perpendiculum lq, ac ponatur $Aq = p$, $ql = q$, erit $\mu = \frac{q}{v}$ & $\nu = \frac{pq}{v} = \frac{p-t}{v}$, unde fit $v = \frac{q}{\mu}$, & $t = p - \nu v = p - \frac{\nu q}{\mu}$. Subſtituantur hi valores in æquatione inter t & v ante inventa, & prodibit $\frac{q}{\mu} = \frac{-\mu\varepsilon p - 2\nu\delta p + \nu\varepsilon q + 2\nu\nu\delta q : \mu - \mu\gamma - \nu\beta}{2\mu\mu\zeta + 2\mu\nu\varepsilon + 2\nu\nu\delta}$

ſeu

$$(2\mu\mu\zeta + \mu\nu\varepsilon)q + (\mu\mu\varepsilon + 2\mu\nu\delta)p + \mu\mu\gamma + \mu\nu\beta = 0,$$

ſeu

$$(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)q + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)p + \gamma\mu + \nu\beta = 0,$$

qua æquatione poſitio Diametri ig definitur.

105. Prior Diameter IG, cujus poſitio per hanc æquationem determinabatur $2\zeta z + \varepsilon x + \gamma = 0$, producta cum Axe concurrat in O, eritque $AO = \frac{-\gamma}{\varepsilon}$; hinc fit $PO = \frac{-\gamma}{\varepsilon} - x$, & anguli LOP tangens erit $= \frac{z}{PO} = \frac{-\varepsilon z}{\varepsilon x + \gamma}$

$= \frac{\varepsilon}{2\zeta}$, & tangens anguli MLG, sub quo Diameter IG Ordinatas MN bisecat erit $= \frac{2\zeta}{\varepsilon}$. Altera vero Diameter ig producta Axi occurrat in o, eritque $Ao = \frac{-\mu\gamma - \nu\delta}{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}$, & anguli Aol tangens erit $= \frac{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}{2\mu\zeta + \nu\varepsilon}$. Cum jam anguli AOL tangens sit $= \frac{\varepsilon}{2\zeta}$, ambæ Diametri se mutuo interſecabunt in puncto quodam C, facientque angulum $OCo = Aol - AOL$, cujus propterea tangens est $= \frac{4\nu\delta\zeta - \nu\varepsilon\varepsilon}{4\mu\zeta\zeta + 2\nu\delta\varepsilon + 2\nu\varepsilon\zeta + \mu\varepsilon\varepsilon}$. Angulus autem, sub quo hæc altera Diameter suas Ordinatas bisecat, est $Mlo = 180° - lpo - Aol$: hujus propterea tangens est $= \frac{2\mu\mu\zeta + 2\mu\nu\varepsilon + 2\nu\nu\delta}{\mu\mu\varepsilon + 2\mu\nu\delta - 2\mu\nu\zeta - \nu\nu\varepsilon}$.

106. Inquiramus autem in punctum C, ubi hæ duæ Diametri se mutuo interſecant: ex quo ad Axem perpendiculum CD demittatur, ac vocetur $AD = g$, $CD = h$; eritque primo, quod C in Diametro IG extat, $2\zeta h + \varepsilon g + \gamma = 0$. Deinde, quia C quoque in Diametro ig reperitur, erit

$$(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)h + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)g + \mu\gamma + \nu\delta = 0.$$

Subtrahatur hinc prior æquatio per μ multiplicata, ac remanebit

$$\nu\varepsilon h + 2\nu\delta g + \nu\delta = 0, \text{ seu } \varepsilon h + 2\delta g + \delta = 0.$$

Ex his fit $h = \frac{-\varepsilon g - \gamma}{2\zeta} = \frac{-2\delta g - \delta}{\varepsilon}$, ideoque $(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)g = 2\delta\zeta - \gamma\varepsilon$, & $g = \frac{2\delta\zeta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ & $h = \frac{2\gamma\delta - \delta\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$. In quibus determinationibus cum non insint quantitates μ & ν, a quibus obliquitas Applicatarum pMn pendet, manifestum est punctum C idem manere, utcunque obliquitas varietur.

 107. Om-

Cap. V.

LIB. II. 107. Omnes ergo Diametri IG & ig ſe mutuo in eodem puncto C decuſſant: quod ergo ſi ſemel fuerit inventum, omnes Diametri per id tranſibunt; ac viciſſim omnes rectæ per id ductæ erunt Diametri, quæ omnes Ordinatas ſub certo quodam angulo ductas biſecent. Cum igitur hoc punctum in quavis Linea ſecundi ordinis ſit unicum, in eoque omnes Diametri ſe mutuo decuſſent, hoc punctum vocari ſolet CENTRUM Sectionis conicæ. Quod ergo ex æquatione inter x & y propoſita

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \varepsilon xy + \zeta yy$$

ita invenitur, ut ſumta $AD = \frac{2\beta\zeta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$, capiatur $CD = \frac{2\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$.

108. Supra autem invenimus eſſe $AK + AH = \frac{4\beta\zeta - 2\gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$: ſunt autem IK & GH perpendicula ex terminis Diametri IG in Axem demiſſa; unde perſpicitur eſſe $AD = \frac{AK + AH}{2}$, atque ideo punctum D erit medium inter puncta K & H. Quam ob rem Centrum quoque C in medio Diametri IG erit ſitum; quod cum de quavis alia Diametro æque valeat, conſequens eſt non ſolum omnes Diametros ſe mutuo in eodem puncto C decuſſare, ſed etiam ſe invicem biſariam ſecare.

TAB. VII. Fig. 26. 109. Sumamus nunc quamcunque Diametrum AI pro Axe ad quem Ordinatæ MN applicatæ ſint ſub angulo $APM = q$, cujus Sinus $= m$ & Coſinus $= n$. Ponatur Abſciſſa $AP = x$ & Applicata $PM = y$, cujus cum duo ſint valores æquales alter alterius negativus eorumque adeo ſumma $= 0$, æquatio generalis pro Linea ſecundi Ordinis abibit in hanc formam $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$; quæ, ſi ponatur $y = 0$, dabit puncta G & I in Axe, ubi is a Curva trajicitur; æquationis ſcilicet

licet $xx + \frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha}{\gamma} = 0$ radices erunt $x = AG$ & $x = AI$; ideoque habebitur $AG + AI = \frac{-\beta}{\gamma}$, & $AG.AI = \frac{\alpha}{\gamma}$. Cum igitur Centrum C in medio Diametri GI sit positum, facile reperietur Centrum Sectionis conicæ C. Erit enim $AC = \frac{AG + AI}{2} = \frac{-\beta}{2\gamma}$.

110. Cognito jam Centro Sectionis conicæ C, in Axe AI, id convenientissime pro initio Abscissarum accipietur. Statuatur ergo $CP = t$, quia manet $PM = y$, ob $x = AC - CP = \frac{-\beta}{2\gamma} - t$, prodibit hæc æquatio inter Coordinatas t & y

$$yy = \alpha - \frac{\beta\beta}{2\gamma} + \frac{\beta\beta}{4\gamma} - \beta t + \beta t + \gamma tt$$

seu

$$yy = \alpha - \frac{\beta\beta}{4\gamma} + \gamma tt.$$

Posito igitur x loco t, habebitur æquatio generalis pro Lineis secundi ordinis, sumta Diametro quacunque pro Axe, & Centro pro Abscissarum initio, quæ, mutata constantium forma, erit $yy = \alpha - \beta xx$. Posito ergo $y = 0$ fiet $CG = CI = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, ideoque tota Diameter GI erit $= 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

111. Ponatur $x = 0$, ac reperietur Ordinata per Centrum transiens EF: fiet scilicet $CE = CF = \sqrt{\alpha}$; ideoque tota Ordinata $EF = 2\sqrt{\alpha}$; quæ, quia per Centrum transit, pariter erit Diameter, cum illa GI angulum faciens $ECG = q$. Hæc autem altera Diameter EF bisecabit omnes Ordinatas priori Diametro GI parallelas; facta enim Abscissa AP negativa, Applicata aC versus I cadens manebit priori PM æqualis; &, cum eidem sit parallela, puncta ambo M juncta dabunt Lineam Diametro GI parallelam, ideoque bisecandam

LIB. II. a Diametro EF. Hæ igitur ambæ Diametri GI & EF ita inter ſe ſunt affectæ, ut altera biſecet omnes Ordinatas alteri parallelas, quam ob reciprocam proprietatem hæ duæ Diametri inter ſe CONJUGATÆ appellantur. Si igitur in terminis G & I Diametri GI ducantur rectæ alteri Diametro EF parallelæ, tangent hæ Lineam curvam, ſimilique modo ſi per E & F ducantur rectæ Diametro GI parallelæ eæ tangent Curvam in punctis E & F.

112. Ducatur nunc Applicata quævis MQ obliquangula; ſitque angulus $AQM = \Phi$, ejus Sinus $= \mu$ & Coſ. $= \nu$. Ponatur Abſciſſa $CQ = t$, & Applicata $MQ = u$, eritque in triangulo PMQ ob ang. P$MQ = \Phi - q$ ac propterea *ſin.* P$MQ = \mu n - \nu m$, $y : u :$ P$Q = \mu : m : \mu n - \nu m$ hincque $y = \frac{\mu u}{m}$ & P$Q = \frac{(\mu n - \nu m)u}{m}$, unde $x = t -$ P$Q = t - \frac{(\mu n - \nu m)u}{m}$. Subſtituantur hi valores in æquatione ſuperiori $yy = \alpha - \beta xx$, ſeu $yy + \beta xx - \alpha = 0$, ac orietur

$$(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)uu - 2\beta m(\mu n - \nu m)tu + \beta m^2 tt - \alpha m^2 = 0,$$

ex qua Applicata u duos obtinet valores QM & $-Qn$ eritque $QM - Qn = \frac{2\beta m(\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu\mu)^2}$. Biſecetur Ordinata Mn in p, eritque recta Cpg nova Diameter ſecans omnes Ordinatas ipſi Mn parallelas bifariam, eritque $Qp = \frac{\beta m(\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2}$.

113. Obtinetur autem hinc anguli GCg tangens $= \frac{\mu . Qp}{CQ + \nu . Qp}$, vel *tang.* $GCg = \frac{\beta m(\mu n - \nu m)}{\mu + n\beta(\mu n - \nu m)}$ & *tang.* $Mpg = \frac{\mu . CQ}{pQ + \nu . CQ} = \frac{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2}{\mu\nu + \beta(\mu n - \nu m)(\nu n + \mu m)}$, qui eſt angulus ſub quo novæ Ordinatæ Mn a Diametro gi biſecantur. Porro vero erit $Cp^2 = CQ^2 + Qp^2 + 2\nu . CQ \times$

$Qp =$

$$Qp = \frac{\mu^4 + 2\beta\mu^3 n(\mu n - \nu m) + \beta\beta\mu\mu(\mu n - \nu m)^2}{(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)^2}\,tt$$: ideoque Cap. V.

$$Cp = \frac{\mu t\sqrt{(\mu^2 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2)}}{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2}$$

Ponatur $Cp = r$ & $pM = s$, eritque $t =$

$$\frac{(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)r}{\mu\sqrt{(\mu^2 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2)}}$$ & $u = s +$

$$Qp = s + \frac{\beta m(\mu n - \nu m)r}{\mu\sqrt{(\mu^2 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2)}},$$

qui valores porro dant

$$y = \frac{\mu s}{m} + \frac{\beta(\mu n - \nu m)r}{\sqrt{(\ldots\ldots\ldots\ldots)}}$$

$$x = -\frac{(\mu n - \nu m)s}{m} + \frac{\mu r}{\sqrt{(\ldots\ldots\ldots\ldots)}},$$

unde ex æquatione $yy + \beta xx - \alpha$ orietur

$$\frac{(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)ss}{mm} + \frac{\beta(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)rr}{\mu\mu + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2} - \alpha = 0.$$

114. Vocemus jam ſemidiametrum $CG = f$ & ſemiconjugatam $CE = CF = g$, eritque $f = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ & $g = \sqrt{\alpha}$, ſeu $\alpha = gg$ & $\beta = \frac{gg}{ff}$: unde fit $yy + \frac{ggxx}{ff} = gg$. Ponamus porro angulum $GCg = p$, erit $tang.\ p = \frac{\beta m(\mu n - \nu m)}{\mu + n\beta(\mu n - \nu m)}$. At, ob angulum $GCE = q$, ſi ponatur angulus $ECe = \varpi$, erit $AQM = \Phi = q + \varpi$; ideoque $\mu = ſin.\ (q + \pi)$; $\nu = coſ.\ (q + \varpi)$, $m = ſin.\ q$ & $n = coſ.\ q$. Ergo $tang.\ p = \frac{\beta.\ ſin.\ q.\ ſin.\ \varpi}{ſin.\ (q + \varpi) + \beta.\ coſ.\ q.\ ſin.\ \pi} = \frac{\beta.\ tang\ q.\ tang.\ \varpi}{tang.\ q + tang.\ \varpi + \beta\ tang.\ \varpi}$, &

$$ſin.\ p = \frac{\beta.\ ſin.\ q.\ ſin.\ \pi}{\sqrt{(\mu\mu + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2)}},$$

$\mu\mu +$

atque

LIB. II. $\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2 = ((\mathit{fin.}\,(q+\varpi))^2) + \beta(\mathit{fin.}\,\varpi)^2$, quibus valoribus in subsidium vocatis prodit ista æquatio inter r & s $\frac{((\mathit{fin.}\,\overline{q+\varpi})^2 + \beta(\mathit{fin.}\,\pi)^2)ss}{(\mathit{fin.}\,q)^2} + \frac{\beta((\mathit{fin.}\,\overline{q+\pi})^2 + \beta(\mathit{fin.}\,\pi)^2)rr}{\beta\beta(\mathit{fin}\,q)^2(\mathit{fin.}\,\varpi)^2}$ $(\mathit{fin.}\,p)^2 - \alpha = 0$. At est $\beta = \frac{\mathit{tang}\,p.\,\mathit{fin.}\,(q+\pi)}{(\mathit{fin.}\,q - \mathit{cof}\,q.\,\mathit{tang.}\,p)\,\mathit{fin.}\,\pi} = \frac{\mathit{tang.}\,p.\,(\mathit{tang.}\,q + \mathit{tang.}\,\varpi)}{\mathit{tang.}\,\pi\,(\mathit{tang.}\,q - \mathit{tang.}\,p)} = \frac{gg}{ff} = \frac{\mathit{cot.}\,\varpi.\,\mathit{tang.}\,q + 1}{\mathit{cot.}\,p.\,\mathit{tang.}\,q - 1}$, seu $\mathit{tang.}\,q = \frac{ff \pm gg}{gg.\,\mathit{cot.}\,p - ff.\,\mathit{cot.}\,\pi}$, unde plurima consectaria deduci possunt. Erit vero $\frac{gg}{ff} = \frac{\mathit{fin.}\,p.\,\mathit{fin.}\,(q+\pi)}{\mathit{fin.}\,\pi\,\mathit{fin.}\,(q-p)}$.

115. Sit semidiameter $Cg = a$, cjusque semidiameter conjugata $C = b$; erit ex æquatione ante inventa,

$$a = \frac{\mathit{fin.}\,q.\,\mathit{fin.}\,\pi\,\sqrt{\alpha\beta}}{\mathit{fin.}\,p\,\sqrt{((\mathit{fin.}\,\overline{q+\pi})^2 + \beta(\mathit{fin.}\,\pi)^2)}} = \frac{gg.\,\mathit{fin.}\,q.\,\mathit{fin.}\,\pi}{\mathit{fin.}\,p\,\sqrt{(ff(\mathit{fin.}\,(q+\pi))^2 + gg(\mathit{fin.}\,\varpi)^2)}},$$

& $b = \frac{fg.\,\mathit{fin.}\,q}{\sqrt{(ff(\mathit{fin.}\,(q+\pi)^2) + gg(\mathit{fin.}\,\pi)^2)}}$, hinc erit $a : b = g.\,\mathit{fin.}\,\pi : f.\,\mathit{fin.}\,p$. Est vero porro $(\mathit{fin.}\,(q+\pi))^2 + \frac{gg}{ff}(\mathit{fin.}\,\pi)^2 = \frac{\mathit{fin.}\,(q+\pi)}{\mathit{fin.}\,(q-p)}(\mathit{fin.}\,(q-p).\,\mathit{fin.}\,(q+\pi) + \mathit{fin.}\,p\,\mathit{fin.}\,\pi)$ $= \frac{\mathit{fin}\,q.\,(\mathit{fin}\,(q+\pi).\,\mathit{fin.}\,(q+\pi-p)}{\mathit{fin}\,(q-p)}$, unde fiet $a = \frac{gg.\,\mathit{fin.}\,\pi}{f.\,\mathit{fin.}\,p}\sqrt{\frac{\mathit{fin.}\,q.\,\mathit{fin.}\,(q-p)}{\mathit{fin.}\,(q+\pi)\,\mathit{fin.}\,(q+\pi-p)}}$; seu, ob $\frac{gg}{ff} = \frac{\mathit{fin.}\,p\,\mathit{fin.}\,(q+\varpi)}{\mathit{fin.}\,\pi.\,\mathit{fin.}\,(q-p)}$, erit $a = f\sqrt{\frac{\mathit{fin}\,q\,\mathit{fin.}\,(q+\pi)}{\mathit{fin.}\,(q-p).\,\mathit{fin.}\,(q+\pi-p)}}$ & $b = g\sqrt{\frac{\mathit{fin.}\,q\,\mathit{fin.}\,(q-p)}{\mathit{fin.}\,(q+\pi).\,\mathit{fin.}\,(q+\pi-p)}}$, ergo erit $a : b = f.\,\mathit{fin.}\,(q+\pi) : g.\,\mathit{fin.}\,(q-p)$ & $ab = \frac{fg.\,\mathit{fin.}\,q}{\mathit{fin}\,(q+\pi-p)}$.

116. S

116. Si ergo in Sectione conica binæ Diametri conjugatæ habeantur, GI, EF & gi, ef, erit primo CAP. V.

$$Cg : Ce = CG.\,\text{sin.}\,ECe : CG.\,\text{sin.}\,GCg.$$

Ergo

$$\text{sin.}\,GCg : \text{sin.}\,ECe = CE.\,Ce : CG.\,Cg.$$

& si chordæ Ee & Gg ducantur, fiet hinc Triangulum $CGg =$ Triangulo CEe. Deinde erit $Cg : Ce = CG.\,\text{sin.}\,GCe : CE.\,\text{sin.}\,gCE$, seu $Ce.\,CG.\,\text{sin.}\,GCe = CE.\,Cg.\,\text{sin.}\,gCE$: unde, si ducantur chordæ Ge & gE, erunt Triangula GCe & gCE inter se æqualia, seu e regione erit Triangulum $ICf =$ Triangulo iCF. Ultima vero æquatio $ab.\,\text{sin.}\,(q + \pi - p) = fg.\,\text{sin.}\,q$ dabit $Cg.\,Ce.\,\text{sin.}\,gCe = CG.\,CE.\,\text{sin.}\,GCE$. Quod si ergo ducantur chordæ EG & eg, vel e regione FI & fi erunt pariter Triangula ICF & iCf æqualia: unde sequitur omnia parallelogramma, quæ circa binas Diametros conjugatas describuntur, inter se esse æqualia.

117. Habentur ergo tria triangulorum paria inter se æqualia, nempe,

I. Triangulum FCf æquale Triangulo ICi.
II. Triangulum fCI æquale Triangulo FCi.
III. Triangulum FCI æquale Triangulo fCi.

Unde sequitur fore trapezia $FfCI$ & $iICf$ inter se æqualia; a quibus si auferatur idem triangulum fCI, erit Triangulum $FIf =$ Triangulo Ifi: quæ cum super eadem basi fI sint constituta, necesse est ut sit chorda Fi chordæ fI parallela. Porro itaque erit Triangulum $FIi =$ Triangulo ifF, ad quæ si addantur triangula æqualia FCI & fCi, erunt quoque hæc trapezia inter se æqualia $FCIi = iCfF$.

118. Hinc etiam deducitur methodus ad quodvis Lineæ secundi ordinis punctum M tangentem MT ducendi. Sumta enim Diametro GI pro Axe, cui conjugatæ semissis sit EC, ex puncto M ipsi CE parallela ad Axem ducatur MP, quæ erit semiordinata, ac $PN = PM$. Ducta CM, quæ erit Semidiameter, quæratur ejus Semidiameter conjugata CK, cui tangens MT quæsita erit parallela. Sit angulus $GCE = q$; TAB. VII. Fig. 27.

LIB. II. $GCM = p$ & $ECK = \varpi$; erit, uti vidimus, $\frac{EC^2}{GC^2} = \frac{\text{sin.}\,p.\,\text{sin.}\,(q+\pi)}{\text{sin.}\,\pi.\,\text{sin.}\,(q-p)}$ & $MC = CG\sqrt{\frac{\text{sin.}\,q.\,\text{sin.}\,(q+\pi)}{\text{sin.}\,(q-p).\,\text{sin.}\,(q+\pi-p)}}$. At in Triangulo CMP est $MC^2 = CP^2 + MP^2 + 2PM \times CP.\,\text{cos}.\,q.$ & $MP : MC = \text{sin.}\,p : \text{sin.}\,q.$ & $MP : CP = \text{sin.}\,p : \text{sin.}\,(q-p)$. Deinde in Triangulo CMT, ob angulos datos, erit $CM : CT : MT = \text{sin.}\,(q+\pi) : \text{sin.}\,(q+\pi-p) : \text{sin.}\,p$. Hinc, angulis eliminatis, erit $MC = CG\sqrt{\frac{MC}{CP} \cdot \frac{CM}{CT}}$ seu $CG^2 = CP \cdot CT$. Hinc erit $CP : CG = CG : CT$, unde positio tangentis expedite invenitur. Erit autem ex hac proportione *dividendo* $CP : PG = CG : TG$; & ob $CG = CI$ *componendo* $CP : IP = CG : TI$.

119. Cum sit $\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\text{sin.}\,p.\,\text{sin.}\,(q+\varpi)}{\text{sin.}\,\varpi.\,\text{sin.}\,(q-p)}$ & $\frac{CK^2}{CM^2} = \frac{\text{sin.}\,p.\,\text{sin.}\,(q-p)}{\text{sin.}\,\pi.\,\text{sin.}\,(q+\pi)}$, itemque $\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\text{sin.}\,q.\,\text{sin.}\,(q+\pi)}{\text{sin.}\,(q-p).\,\text{sin}\,(q+\pi-p)}$ & $\frac{CK^2}{CE^2} = \frac{\text{sin.}\,q.\,\text{sin.}\,(q-p)}{\text{sin.}\,(q+\varpi).\,\text{sin.}\,(q+\pi-p)}$, erit $\frac{CE^2+CG^2}{CG^2} = \frac{\text{sin.}\,p.\,\text{sin.}\,(q+\varpi) + \text{sin.}\,\varpi.\,\text{sin.}\,(q-p)}{\text{sin.}\,\pi.\,\text{sin.}\,(q-p)}$, & $\frac{CK^2+CM^2}{CM^2} = \frac{\text{sin.}\,p.\,\text{sin.}\,(q-p) + \text{sin.}\,\pi.\,\text{sin.}\,(q+\varpi)}{\text{sin.}\,\varpi.\,\text{sin.}\,(q+\pi)}$. At est $\text{sin.}\,A.\,\text{sin.}\,B = \frac{1}{2}\,\text{cos}.\,(A-B) - \frac{1}{2}\,\text{cos}.\,(A+B)$ & vicissim $\frac{1}{2}\,\text{cos}.\,A - \frac{1}{2}\,\text{cos}.\,B = \text{sin.}\,\frac{A+B}{2}.\,\text{sin.}\,\frac{B-A}{2}$. Unde erit $\text{sin.}\,p.\,\text{sin.}\,(q+\pi) + \text{sin.}\,\varpi.\,\text{sin.}\,(q-p) = \frac{1}{2}\,\text{cos}.\,(q+\varpi-p) - \frac{1}{2}\,\text{cos}.\,(q+\pi+p) + \frac{1}{2}\,\text{cos}.\,(q-\pi-p) - \frac{1}{2}\,\text{cos}.\,(q+\pi-p) = \frac{1}{2}\,\text{cos}.\,(q-\varpi-p) - \frac{1}{2}\,\text{cos}.\,(q+\pi+p) = \text{sin.}\,q.\,\text{sin.}\,(p+\pi)$. Atque $\text{sin.}\,p.\,\text{sin.}\,(q-p) + \text{sin.}\,\pi.\,\text{sin.}\,(q+\varpi) = \frac{1}{2}\,\text{cos}.\,(q-2p) - \frac{1}{2}\,\text{cos}.\,q + \frac{1}{2}\,\text{cos}.\,q -$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\, cos.(q + 2\varpi) = \frac{1}{2}\, cos.(q - 2p) - \frac{1}{2}\, cos.(q + 2\varpi) =$ CAP. V.
$sin.(q + \varpi - p).\, sin.(p + \varpi)$.

Hinc ergo erit

$$\frac{CE^2 + CG^2}{CG^2} = \frac{sin.\, q.\, sin.\,(p + \pi)}{sin.\, \pi.\, sin.\,(q - p)},$$

&

$$\frac{CK^2 + CM^2}{CM^2} = \frac{sin.(q + \varpi - p).\, sin.\,(p + \pi)}{sin.\, \varpi.\, sin.\,(q + \pi)},$$

unde conficitur

$$\frac{CE^2 + CG^2}{CK^2 + CM^2} = \frac{CG^2}{CM^2} \cdot \frac{sin.\, q.\, sin.\,(q + \pi)}{sin\,(q - p).\, sin.(q + \varpi - p)} = \frac{CG^2}{CM^2} \cdot \frac{CM^2}{CG^2}.$$

Quare erit $CE^2 + CG^2 = CK^2 + CM^2$, ideoque in eadem Linea ſecundi ordinis ſumma quadratorum binarum Diametrorum conjugatarum ſemper eſt conſtans.

120. Cum igitur dentur duæ Semidiametri conjugatæ CG & CE, pro Semidiametro CM ad lubitum aſſumta ſtatim reperitur ejus ſemidiameter conjugata CK ſumendo $CK = \surd(CE^2 + CG^2 - CM^2)$. Ex ſuperioribus ergo Sectionum conicarum proprietatibus erit $TG.TI : TM^2 = CG.CI : CK^2 = CG^2 : CK^2 = CG^2 : CE^2 + CG^2 - CM^2$; ideoque $TM^2 = CG \surd \frac{CE^2 + CG^2 - CM^2}{TG.\, TI}$. Simili modo, ſi producta Ordinata MN, ducatur tangens NT, ambæ tangentes MT & NT Axi TI in eodem puncto T occurrent. Erit enim pro utraque $CP : CG = CG : CT$. At vero ducta recta CN erit $TN = CG \surd \frac{CE^2 + CG^2 - CM^2}{TG.\, TI}$, adeoque $TM^2 : TN^2 = CE^2 + CG^2 - CM^2 : CE^2 + CG^2 - CN^2$. Erit vero, ob biſectam MN in P, $sin.\, CTM : sin.\, CTN = TN : TM = \surd(CE^2 + CG^2 - CN^2) : \surd(CE^2 + CG^2 - CM^2)$.

121. Ducantur in terminis Diametri A & B tangentes AK, TAB.
BL, ac producatur tangens quæcunque MT' donec utramque VII.
tangentem ſecet in punctis K & L. Sit ECF Diameter con- *Fig.* 28.
jugata, cui tum Applicatæ MP tum tangentes AK & BL,

 erunt

LIB. II. erunt parallelæ. Cum jam ſit, ex natura tangentis, $CP : CA = CA : CT$ ob $CB = CA$ erit $CP : AP = CA : AT$, & $CP : BP = CA : BT$ ergo $CP : CA = CA : CT = AP : AT = BP : BT$, hincque $AT : BT = AP : BP$. At eſt $AT : BT = AK : BL$, ergo $AK : BL = AP : BP$. Deinde eſt $AT = \frac{CA \cdot AP}{CP}$; $BT = \frac{CA \cdot BP}{CP}$; & $PT = \frac{CA \cdot AP}{CP} + AP = \frac{AP \cdot BP}{CP}$ ergo $AT : PT = CA : BP = AK : PM$; ſimilique modo erit $BT : PT = CA : AP = BL : PM$; unde fit $AK = \frac{CA \cdot PM}{BP}$, $BL = \frac{CA \cdot PM}{AP}$ & $AK \cdot BL = \frac{CA^2 \cdot PM^2}{AP \cdot BP}$. At eſt $AP \cdot BP : PM^2 = AC^2 : CE^2$, unde conſequitur iſta egregia proprietas $AK \cdot BL = CE^2$, ex qua porro fit $AK = CE\sqrt{\frac{AP}{BP}}$ & $BL = CE\sqrt{\frac{BP}{AP}}$, & $AP : BP = AK^2 : CE^2 = CE^2 : BL^2 = KM : ML$, atque $AK : BL = KM : LM$.

122. In quocunque ergo Curvæ puncto M ducatur tangens occurrens tangentibus parallelis AK, BL in K & L, erit ſemper Semidiameter CE tangentibus AK & BL parallela media proportionalis inter AK & BL, ſeu erit $CE^2 = AK \times BL$. Quod ſi ergo in alio quocunque Curvæ puncto m ſimili modo ducatur tangens kml, erit quoque $CE^2 = Ak \cdot Bl$, ideoque $AK : Ak = Bl : BL$; hincque erit quoque $AK : Kk = Bl : Ll$. Secent tangentes KL & kl ſe mutuo in o, eritque $AK : Bl = Ak : BL = Kk : Ll = ko : lo = Ko : Lo$. Atque hæ ſunt præcipuæ Sectionum conicarum proprietates, ex quibus NEWTONUS plurima inſignia problemata reſolvit in *Principiis*.

123. Cum ſit $AK : Bl = Ko : Lo$, ſi tangens LB producatur in I ut ſit $BI = AK$, erit I punctum, ubi tangens ex altera parte ipſi KL parallela hanc tangentem LB eſſet ſectura, quemadmodum K in tangente LK eſt punctum, ubi ea

a

a tangente AK ipſi BL parallela ſecatur. Tranſibit ergo recta IK per Centrum C, ibique bifariam ſecabitur. Quodſi igitur duæ quæcunque tangentes BL, ML, modo præſcripto in I & K producantur, eæque a tertia tangente lmo in punctis l & o ſecentur, erit $BI : Bl = Ko : Lo$, & , *componendo*, $IB : Il = Ko : KL$, ubicunque ergo tertia tangens lmo ducatur erit perpetuo $IB . KL = Il . Ko$. Ducta ergo quarta tangente quacunque $\lambda\mu\omega$ binas primum aſſumtas IL & KL ſecante in λ & ω, erit pariter $IB . KL = I\lambda . K\omega$, ideoque $Il . Ko = I\lambda . K\omega$ ſeu $Il : I\lambda = K\omega : Ko$. Ductis ergo rectis $l\omega$, λo, in qua ratione hæ ſecabuntur, recta per ſectionum puncta tranſiens in eadem ratione ſecabit rectam IK. Quare ſi rectæ $l\omega$ & λo biſecentur, recta per biſectionis puncta tranſiens, biſecabit quoque rectam IK ideoque per Centrum Sectionis conicæ C tranſibit. CAP. V.

124. Quod recta nmH, quæ rectas $l\omega$, λo in data ratione ſecat, in eadem ratione ſecare debeat rectam KI, ſi quidem fuerit $Il : I\lambda = K\omega : Ko$, ſeu $I\lambda : \lambda l = Ko : o\omega$, hoc modo ex Geometria oſtendetur. Secet recta mn utramque $l\omega$ & λo in ratione $m : n$, ſeu ſit $\lambda m : mo = ln : n\omega = m : n$, & ea producta trajiciat tangentes IL, & KL in Q & R; eritque $ſin. Q : ſin. R = \frac{ln}{Ql} : \frac{n\omega}{R\omega} = \frac{\lambda m}{Q\lambda} : \frac{mo}{Ro} = \frac{m}{Ql} : \frac{n}{R\omega}$, ergo $Ql : R\omega = Q\lambda : Ro$, & *dividendo* $l\lambda : o\omega = Q\lambda : Ro = Ql : R\omega$. Cum vero ſit $l\lambda : o\omega = I\lambda : Ko$, erit quoque $QI : RK = l\lambda : o\omega$, & $ſin. Q : ſin. R = \frac{m}{l\lambda} : \frac{n}{o\omega}$. At eſt quoque $ſin. Q : ſin. R = \frac{HI}{QI} : \frac{HK}{KR} = \frac{HI}{l\lambda} : \frac{HK}{o\omega}$, unde fit $HI : HK = m : n = \lambda m : mo = ln : n\omega$. TAB. VIII. Fig. 30.

125. Datis duabus Semidiametris conjugatis $CG . CE$, quæ angulum obliquum $GCE = q$ inter ſe comprehendant, ſemper reperiri poterunt duæ aliæ Semidiametri conjugatæ CM & CK quæ angulum MCK rectum conſtituant. Sit angulus $GCM = p$; & poſito $ECK = \pi$, erit $q + \pi - p = 90°$ ideoque TAB. VII. Fig. 27.

LIB. II. ideoque $\mathit{sin}.\,\varpi = \mathit{cos}.(q-p)$ & $\mathit{sin}.(q+\varpi) = \mathit{cos}.\,p$. Unde (ex §. 119.) erit $\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\mathit{sin}.\,p.\,\mathit{cos}.\,p}{\mathit{sin}\,(q-p).\mathit{cos}.(q-p)} = \frac{\mathit{sin}.\,2p}{\mathit{sin}.2(q-p)} = \frac{\mathit{sin}.\,2p}{\mathit{sin}.2q.\mathit{cos}.2p - \mathit{cos}.2q.\mathit{sin}.2p}$; ergo $\frac{CG^2}{CE^2} = \mathit{sin}\,2q.\mathit{cot}.2p - \mathit{cos}.2q.$ ex quo fit $\mathit{cot}.\,2\,GCM = \mathit{cot}.\,2q + \frac{CG^2}{CE^2.\,\mathit{sin}.2q}$, quæ æquatio semper præbet solutionem possibilem. Erit vero $\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\mathit{sin}.\,q.\,\mathit{cos}.\,p}{\mathit{sin}.\,(q-p)}$ & $\frac{CG^2}{CM^2} = 1 - \frac{\mathit{tang}.\,p}{\mathit{tang}.\,q}$, unde $\mathit{tang}.p = \mathit{tang}.q - \frac{CG^2}{CM^2}\,\mathit{tang}.\,q$. At cum sit $CM^2 + CK^2 = CG^2 + CE^2$ & $CK.CM = CG.CE.\mathit{sin}.q$; erit $CM + CK = \surd(CG^2 + 2\,CG.CE.\mathit{sin}.q + CE^2)$ & $CM - CK = \surd(CG^2 - 2\,CG \times CE.\mathit{sin}.q + CE^2)$ unde ipsæ Diametri conjugatæ orthogonales reperiuntur.

TAB. VII. Fig. 29. 126. Sint igitur CA & CE ambæ Semidiametri conjugatæ Sectionis conicæ orthogonales, quæ vocari solent DIAMETRI PRINCIPALES, sese in Centro C normaliter decussantes. Sit Abscissa $CP = x$, Applicata $PM = y$, eritque, uti vidimus, $yy = \alpha - \beta xx$, vocatis autem Semidiametris principalibus $AC = a$, $CE = b$ erit $\alpha = bb$ & $\beta = \frac{bb}{aa}$, unde fit $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$. Ex qua æquatione intelligitur, cum non mutetur, sive x & y sumantur affirmativæ sive negativæ, Curvam esse habituram quatuor partes similes & æquales utrinque circa Diametros AC & EF sitas. Erit nempe quadrans ACE similis & æqualis quadranti ACF, hisque bini pares ad alteram partem Diametri EF sunt positi.

127. Si ex Centro C, quod pro initio Abscissarum assumsimus, ducamus rectam CM, erit ea $= \surd(xx + yy) = \surd(bb - \frac{bbxx}{aa} + xx)$, unde intelligitur, si fuerit $b = a$, seu $CE = CA$, fore $CM = \surd bb = b = a$. Hoc ergo casu omnes rectæ ex Centro C ad Curvam productæ inter se erunt

erunt æquales; quæ, cum ſit proprietas Circuli, manifeſtum eſt Sectionem conicam, cujus binæ Diametri conjugatæ principales ſint inter ſe æquales, eſſe Circulum, cujus adeo æquatio inter Coordinatas orthogonales, poſitis $CP = x$ & $PM = y$, erit $yy = aa - xx$, exiſtente Radio Circuli $CA = a$.

128. Sin autem non fuerit $b = a$, recta CM per x rationaliter nunquam exprimi poterit. Dabitur autem aliud punctum D in Axe, a quo omnes rectæ ad Curvam ductæ DM rationaliter exprimi poſſunt; ad quod inveniendum, ponatur $CD = f$, atque ob $DP = f - x$ erit $DM^2 = ff - 2fx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa} = bb + ff - 2fx + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$, quæ expreſſio quadratum evadet ſi fuerit $ff = \frac{(aa - bb)(bb + ff)}{aa}$ ſeu $o = aa - bb - ff$, unde fit $f = \pm \surd(aa - bb)$, hujuſmodi ergo punctum dabitur geminum in Axe AC, utrinque ſcilicet a Centro in diſtantia $CD = \surd(aa - bb)$. Erit autem tum $DM^2 = aa - 2x\surd(aa - bb) + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$, hincque $DM = a - \frac{x\surd(aa - bb)}{a} = AC - \frac{CD . CP}{AC}$. Facto $CP = o$, fiet $DM = DE = a = AC$, ſumta autem Abſciſſa $CP = CD$, ſeu $x = \surd(aa - bb)$, recta DM abibit in Applicatam DG, eritque ergo $DG = \frac{bb}{a} = \frac{CE^2}{AC}$, ſeu fiet DG tertia proportionalis ad AC & CE.

129. Ob ſingularem hanc proprietatem, qua puncta D hoc modo definita gaudent, iſta Diametri principalis puncta omnino attentione ſunt digna; plurimis aliis autem hæc eadem puncta prædita ſunt eximiis proprietatibus, ob quas peculiaria nacta ſunt nomina. Vocantur vero iſta puncta FOCI ſeu UMBILICI Sectionis conicæ; &, cum in Diametro majori a ſint poſita, iſta Diameter a ſua conjugata b ita diſtinguitur, ut ea vocetur Axis principalis & *transverſus*, dum altera b ejus Axis *conjugatus* appellatur. Applicata vero orthogonalis DG in ipſo Foco

Foco alterutro erecta nomen SEMIPARAMETRI obtinuit, tota enim PARAMETER est Ordinata in D, seu DG bis sumta, quæ etiam *latus rectum* nuncupatur. Est ergo Semiaxis conjugatus CE media proportionalis inter Semiparametrum DG & Semiaxem transversum AC. Termini porro Axis transversi, ubi is a Curva intersecatur, vocantur VERTICES, ut A; atque hanc habent proprietatem ut iis in locis tangens curvæ sit ad Axem principalem AC normalis.

130. Ponatur semiparameter $DG = c$; & distantia Foci a Vertice $AD = d$, erit $CD = a - d = \surd(aa - bb)$ & $DG = \frac{bb}{a} = c$, unde fit $bb = ac$, & $a - d = \surd(aa - ac)$: ergo $ac = 2ad - dd$, & $a = \frac{dd}{2d - c}$, & $b = d\surd\frac{c}{2d - c}$. Ex datis ergo distantia Foci a Vertice $AD = d$ & semilatere recto $DG = c$, Sectio conica determinatur. Posito nunc $CP = x$ erit $DM = a - \frac{(a - d)x}{a} = \frac{dd}{2d - c} - \frac{(c - d)x}{d}$. Sit $DP = t$, erit $x = CD - t = \frac{(c - d)d}{2d - c} - t$; unde fit $DM = c + \frac{(c - d)t}{d}$. Vocetur angulus $ADM = v$, erit $\frac{t}{DM} = -\operatorname{cos}.v$, ideoque $d.DM = cd + (d - c) DM.\operatorname{cos}.v$ & $DM = \frac{cd}{d - (d - c).\operatorname{cos}.v}$, & $\operatorname{cos}.v = \frac{d(DM - DG)}{(d - c)DM}$.

CAPUT

CAPUT VI.

De Linearum secundi ordinis subdivisione in genera.

131. PRopriettates, quas in Capite præcedente elicuimus, in omnes Lineas, quæ ad ordinem secundum pertinent, æque competunt; neque enim ullius varietatis, qua istæ Lineæ aliæ ab aliis distinguuntur, fecimus mentionem. Quanquam autem omnes Lineæ secundi ordinis his expositis proprietatibus communiter gaudent, tamen eæ inter se ratione figuræ plurimum differunt; quamobrem Lineas in hoc ordine contentas distribui convenit in genera, quo facilius diversæ figuræ, quæ in hoc ordine occurrunt, distingui, atque proprietates, quæ tantum in singula genera competunt, evolvi queant.

132. Æquationem autem generalem pro Lineis secundi ordinis, mutando tantum Axem & Abscissarum initium, eo reduximus, ut omnes Lineæ secundi ordinis contineantur in hac æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$, in qua x & y denotant Coordinatas orthogonales. Cum igitur pro qualibet Abscissa x Applicata y duplicem induat valorem, alterum affirmativum alterum negativum, iste Axis, in quo Abscissæ x capiuntur, Curvam secabit in duas partes similes & æquales; eritque adeo iste Axis Diameter Curvæ orthogonalis, atque omnis Linea secundi ordinis habebit Diametrum orthogonalem, super qua, tanquam Axe, Abscissas hic assumo.

133. Tres igitur ingrediuntur in hanc æquationem quantitates constantes α, β, & γ: quæ, cum infinitis modis inter se variari possint, innumerabiles varietates in Lineis curvis orientur, quæ autem vel magis vel minus a se invicem ratione figuræ discrepabunt. Primum enim eadem figura infinities ex proposita æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ resultat; variato nempe Abscissarum initio in Axe, quod fit dum Abscissa x

LIB II. data quantitate vel augetur vel minuitur. Deinde eadem quoque figura, ſub diverſa magnitudine in æquatione continetur, ita ut infinitæ Lineæ curvæ prodeant, quæ tantum ratione quantitatis a ſe invicem differant, uti Circuli diverſis Radiis deſcripti. Ex quibus manifeſtum eſt, non omnem litterarum α, β, & γ variationem diverſas Linearum ſecundi ordinis ſpecies vel genera producere.

134. Maximum autem diſcrimen in Lineis curvis quæ in æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ continentur, ſuggerit natura coëfficientis γ, prout is vel affirmativum habuerit valorem vel negativum. Si enim γ habeat valorem affirmativum, poſita Abſciſſa x infinita, quo caſu terminus γxx infinities major evadet quam reliqui $\alpha + \beta x$, ac propterea expreſſio $\alpha + \beta x + \gamma xx$ affirmativum obtinet valorem, Applicata y pariter duplicem habebit valorem infinite magnum, alterum affirmativum alterum negativum, quod idem evenit ſi ponatur $x = -\infty$, quo caſu nihilominus expreſſio $\alpha + \beta x + \gamma xx$ induet valorem infinite magnum affirmativum. Hanc ob rem, exiſtente γ quantitate affirmativa, Curva quatuor habebit ramos in infinitum excurrentes, binos Abſciſſæ $x = +\infty$ & binos Abſciſſæ $x = -\infty$ reſpondentes. Hæ igitur curvæ quatuor ramis in infinitum excurrentibus præditæ unum Linearum ſecundi ordinis genus conſtituere cenſentur, atque nomine HYPERBOLARUM appellantur.

135. Sin autem coëfficiens γ negativum habuerit valorem, tum, poſito ſive $x = +\infty$ ſive $x = -\infty$ expreſſio $\alpha + \beta x + \gamma xx$ negativum valorem tenebit, ideoque Applicata y imaginaria fiet. Neque igitur uſquam in his Curvis Abſciſſa neque Applicata poterit eſſe infinita, ideoque nulla dabitur Curvæ portio in infinitum excurrens, ſed tota Curva in ſpatio finito ac determinato continebitur. Hæc igitur Linearum ſecundi ordinis ſpecies nomen ELLIPSIUM obtinuit, quarum propterea natura continetur in hac æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$, ſi γ fuerit quantitas negativa.

136. Cum igitur valor ipſius γ, prout is fuerit vel affirma-

tivus

tivus vel negativus, tam diversam Linearum secundi ordinis indolem producat, ut hinc merito duo diversa genera constituantur: si ponatur $\gamma = 0$, qui valor inter affirmativos & negativos medium tenet locum, Curva quoque hinc resultans mediam quandam speciem inter Hyperbolas atque Ellipses constituet, quæ PARABOLA vocatur, cujus ergo natura hac exprimetur æquatione $yy = \alpha + 6x$. Hic perinde est sive 6 fuerit quantitas affirmativa sive negativa, quoniam indoles Curvæ non mutatur sumta Abscissa x negativa. Sit igitur 6 quantitas affirmativa, atque manifestum est, crescente Abscissa x in infinitum, Applicatam y quoque infinitam fore tam affirmativam quam negativam, ex quo Parabola duos habebit ramos in infinitum excurrentes, plures autem duobus habere non poterit, quia posito $x = -\infty$, Applicatæ y valor fit imaginarius. Cap. VI.

137. Habemus ergo tres Linearum secundi ordinis species, Ellipsin, Parabolam, & Hyperbolam, quæ a se invicem tantopere discrepant, ut eas inter se confundere omnino non liceat. Discrimen enim essentiale in numero ramorum in infinitum excurrentium consistit; Ellipsis enim nullam portionem habet in infinitum abeuntem, sed tota in spatio finito includitur. Parabola vero duos habet ramos in infinitum excurrentes: & Hyperbola quatuor. Quare, cum in Capite præcedente proprietates Sectionum conicarum in genere simus contemplati, nunc quibus proprietatibus quæque species sit prædita, videamus.

138. Incipiamus ab Ellipsi, cujus æquatio est hæc $yy = \alpha + 6x - \gamma xx$, sumtis Abscissis in Diametro orthogonali. Quoniam vero initium Abscissarum ab arbirrio nostro pendet, si id removeamus intervallo $\frac{6}{2\gamma}$, orietur æquatio hujus formæ $yy = \alpha - \gamma xx$, in qua Abscissæ a Centro figuræ capiuntur. Sit igitur C Centrum & AB Diameter orthogonalis, atque erit Abscissa $CP = x$, & Applicata $PM = y$. Fiet ergo Tab. VIII. Fig. 31.

 $y=0$, sumta $x=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ &, si x limites hos $+\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$, $-\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ transgrediatur Applicata y fiet imaginaria; quod indicio est totam Curvam intra istos limites contineri. Erit ergo $CA = CB = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$: tum facto $x=0$, fiet $CD = CE = \sqrt{\alpha}$. Ponatur ergo Semidiameter seu Semiaxis principalis $CA = CB = a$, & Semiaxis conjugatus $CD = CE = b$, erit $\alpha = bb$ & $\gamma = \frac{bb}{aa}$. Unde pro Ellipsi ista orietur æquatio $yy = bb - \frac{bbxx}{aa} = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$.

139. Quando isti Semiaxes conjugati a & b fiunt inter se æquales, tum Ellipsis abibit in Circulum ob $yy = aa - xx$, seu $yy + xx = aa$; erit enim $CM = \sqrt{(xx+yy)} = a$, ideoque omnia Curvæ puncta M æqualiter a Centro C erunt remota, quæ est proprietas Circuli. Sin autem Semiaxes a & b inter se fuerint inæquales, tum Curva erit oblonga, nempe erit vel AB major quam DE vel DE major quam AB. Quia vero Axes conjugati AB & DE inter se commutari possunt, atque perinde est in utro Abscissas capiamus, ponamus AB esse Axem majorem, seu a majorem quam b; atque in hoc Axe existent Foci Ellipsis F & G sumendo $CF = CG = \sqrt{(aa - bb)}$, Semiparameter vero, seu Semilatus rectum Ellipsis erit $= \frac{bb}{a}$, quæ exprimit magnitudinem Applicatæ in alterutro Foco F vel G erectæ.

140. Ad Curvæ punctum M ducantur ex utroque Foco rectæ FM & GM, eritque, uti supra vidimus, $FM = AC - \frac{CF.CP}{AC} = a - \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$, & $GM = a + \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$: unde fit $FM + GM = 2a$. Quare, si ad quodvis Curvæ punctum M ex ambobus Focis ducantur rectæ FM & GM, earum summa semper æquabitur Axi majori

$AB =$

$AB = 2a$; ex quo cum insignis Focorum proprietas perspicitur, tum modus facilis Ellipsin mechanice describendi colligitur. Cap. VI.

141. In puncto M ducatur tangens TMt, quæ Axibus occurrat in punctis T & t; eritque, ut supra demonstravimus, $CP : CA = CA : CT$; unde $CT = \frac{aa}{x}$: similique modo, permutatis Coordinatis, $Ct = \frac{bb}{y}$. Erit ergo $TP = \frac{aa}{x} - x$, $TF = \frac{aa}{x} - \sqrt{(aa - bb)}$, & $TA = \frac{aa}{x} - a$. Fiet itaque $TP = \frac{aa - xx}{x} = \frac{aayy}{bbx}$, & $TM = \frac{y\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}}{bbx}$, hincque $tang.\, CTM = \frac{bbx}{aay}$; $sin.\, CTM = \frac{bbx}{\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}}$ & $cos.\, CTM = \frac{aay}{\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}}$. Quare, si ad Axem in A normalis erigatur AV, quæ Curvam simul tanget, erit $AV = \frac{a(a - x)}{x} \cdot \frac{bbx}{aay} = \frac{bb(a - x)}{ay} = b\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$ ob $ay = b\sqrt{(aa - xx)}$.

142. Cum sit $FT = \frac{aa - x\sqrt{(aa - bb)}}{x}$ & $FM = \frac{aa - x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$ erit $FT : FM = a : x$. Simili vero modo ob $GT = \frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{x}$ & $GM = \frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$ erit $GT : GM = a : x$; unde erit $FT : FM = GT : GM$. At est $FT : FM = sin.\, FMT : sin.\, CTM$ & $GT : GM = sin.\, GMt : sin.\, CTM$, quam ob rem erit $sin.\, FMT = sin.\, GMt$, ideoque angulus FMT = angulo GMt. Ambæ ergo rectæ ex Focis ad punctum Curvæ quodvis M ductæ æqualiter inclinantur ad tangentem Curvæ in illo puncto M, quæ est maxime principalis Factorum proprietas.

143. Cum sit $GT : GM = a : x$, ob $CT = \frac{aa}{x}$ erit quo-

LIB. II. que $CT : CA = a : x$; unde $GT : GM = CT : CA$, quare si ex Centro C rectæ GM parallela ducatur CS, tangenti in S occurrens, erit $CS = CA = a$: eodem autem modo si ex C rectæ FM parallela ducatur ad tangentem erit ea pariter $= CA = a$. Cum autem sit $TM = \frac{y}{bbx}\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}$, erit, ob $aayy = aabb - bbxx$, $TM = \frac{y}{bx}\sqrt{(a^4 - xx)(aa - bb))}$: at est $FT . GT = \frac{a^4 - xx(aa - bb)}{xx}$; unde $TM = \frac{y}{b}\sqrt{FT . GT}$. Quare, ob $TG : TC = TM : TS$, erit $TS = \frac{TM . CT}{TG}$, ideoque $TS = \frac{y . CT}{b}\sqrt{\frac{FT}{GT}} = \frac{y . CT . FT}{b\sqrt{FT . GT}} = \frac{yy . CT . FT}{bb . TM}$. Deinde est $PT = \frac{aayy}{bbx} = \frac{CT . yy}{bb}$, ergo $TS = \frac{PT . FT}{TM}$, ideoque $TM : PT = FT : TS$; unde intelligitur triangula TMP & TFS esse similia, ideoque rectam FS ad tangentem ex Foco F esse normalem. Erit vero $SV = \frac{AF . MV}{GM}$, quod ex his expressionibus eruere licet.

144. Quod si ergo ex alterutro Foco F in tangentem ducatur perpendiculum FS, & ad punctum S ex Centro C recta CS jungatur, erit hæc CS perpetuo semiaxi majori $AC = a$ æqualis. Erit vero ob $TM : y = TF : FS$, $FS = \frac{y . TF}{TM} = \frac{b . TF}{\sqrt{FT\ GT}} = b\sqrt{\frac{FT}{GT}}$, ergo $GT : FT = GM : FM = CD^2 : FS^2$; perpendiculum vero ex altero Foco in tangentem demissum erit $= b\sqrt{\frac{GT}{FT}}$, quare inter hæc perpendicula erit Semiaxis minor $CD = b$ media proportionalis. Demittatur nunc quoque ex Centro C in tangentem perpendiculum CQ erit $TF : FS = GT : CQ$ ergo $CQ = \frac{b . CT}{\sqrt{FT .\ GT}} =$

$bx . CT$

$\frac{bx.CT}{a\sqrt{FM.GM}} = \frac{ab}{\sqrt{FM.GM}}$, unde $CQ - FS = \frac{b.CF}{\sqrt{FT.GT}} =$ Cap. VI.
CX, ducta FX tangenti parallela. Hinc erit $CQ - CX = \frac{b.TF}{\sqrt{FT.GT}}$ & $CQ + CX = \frac{b.TG}{\sqrt{FT.GT}}$, unde $CQ^2 - CX^2 = bb$ & $CX = \sqrt{(CQ^2 - bb)}$: ex dato ergo Axe minori, in perpendiculo CQ reperitur punctum X unde normalis educta per Focum F transibit.

145. His Focorum proprietatibus expositis, consideremus duas quasvis Diametros conjugatas. Erit autem CM Semidiameter, cujus conjugata reperietur si tangenti TM ex Centro parallela ducatur CK. Ponatur $CM = p$, $CK = q$, & angulus $MCK = CMT = s$, erit primo $pp + qq = aa + bb$ & secundo $pq.\,\mathit{fin}.s = ab$, uti supra vidimus. At vero erit $pp = xx + yy = bb + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$ & $qq = aa + bb - pp = aa - \frac{(aa - bb)xx}{aa} = FM.GM$, eodemque modo $pp = FK.GK$. Deinde, cum sit $CQ = \frac{ab}{\sqrt{FM.GM}}$, erit $\mathit{fin}.\,CMQ = \mathit{fin}.s = \frac{ab}{p\sqrt{FM.GM}}$. Denique erit $TM : TP = \frac{y}{b}\sqrt{FT.GT}, \frac{aayy}{bbx} = \sqrt{FM.GM} = \frac{ay}{b} = CK : CR$, unde $CR = \frac{ay}{b}$, & $KR = \frac{bx}{a}$, ideoque $CR.KR = CP.PM$. Denique erit $\mathit{fin}.\,FMS = \frac{b}{\sqrt{GM.FM}} = \frac{b}{q}$: quia porro est $x = CP\,\frac{a\sqrt{(pp - bb)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$ & $y = \frac{b\sqrt{(aa - pp)}}{\sqrt{(aa - bb)}} = PM$, atque $CR = \frac{a\sqrt{(aa - pp)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$ & $KR = \frac{b\sqrt{(pp - bb)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$, erit $\mathit{tang}.\,ACM = \frac{y}{x}$, & $\mathit{tang}.\,2ACM = \frac{2yx}{xx - yy} = \frac{2ab\sqrt{(aa - pp)(pp - bb)}}{(aa + bb)pp - 2aabb}$. At est $ab = pq\,\mathit{fin}.s$, $aa + bb = pp + qq$,

&

LIB. II. & $\sqrt{(aa-pp)(pp-bb)} = -pq.cos.s$, unde fit $tang.2ACM = \frac{-2qq.cos.s}{pp+qq.cos.2s}$, quia $cos.s$ eſt negativus. Tandem eſt $CK^2 = MT.Mt$; ex ſuperioribus vero eruitur $MV = q\sqrt{\frac{AP}{BP}}$ & $AV = b\sqrt{\frac{AP}{BP}}$; unde erit $AV : MV = b : q = CE : CK$. Ergo rectæ, ſi ducantur, AM & EK, inter ſe erunt parallelæ.

146. Quia eſt $pq.ſin.s = ab$, erit pq major quam ab; &, cum ſit $pp + qq = aa + bb$, quantitates p & q magis ad rationem æqualitatis accedunt, quam a & b, unde inter omnes Diametros conjugatas, illæ quæ ſunt orthogonales maxime a ſe invicem diſcrepant. Dabuntur ergo duæ Diametri conjugatæ inter ſe æquales, ad quas inveniendas ſit $q = p$, eritque $2pp = aa + bb$, & $p = q = \sqrt{\frac{aa+bb}{2}}$, & $ſin.s = \frac{2ab}{aa+bb}$, atque $cos.s = \frac{-aa+bb}{aa-bb}$; unde fit $ſin.\frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{aa}{aa-bb}}$, $cos.\frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{bb}{aa-bb}}$, ergo $tang.\frac{1}{2}s = \frac{a}{b} = tang.CEB$, & $MCK = 2CEB = AEB$. Porro $CP = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $CM = \frac{b}{\sqrt{2}}$, quare Semidiametri conjugatæ inter ſe æquales CM, CK erunt parallelæ Cordis AE & BE.

147. Si Abſciſſæ a Vertice A computentur, ponaturque $AP = x$, $PM = y$, cum nunc ſit $a - x$ quod ante erat x, habebitur iſta æquatio $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx) = \frac{2bb}{a}x - \frac{bb}{aa}xx$, ubi patet eſſe $\frac{2bb}{a}$ Parametrum ſeu latus rectum Ellipſis. Ponatur Semilatus rectum, ſeu Applicata in Foco $= c$, & diſtantia Foci a Vertice $AF = d$, erit $\frac{bb}{a} = c$ & $a - \sqrt{(aa-bb)} = d = a - \sqrt{(aa-ac)}$, unde fit $2ad - dd = ac$ & $a = \frac{dd}{2d-c}$. Hinc erit $yy = 2cx - \frac{c(2d-c)xx}{dd}$, quæ eſt

æquatio

æquatio pro Ellipsi inter Coordinatas orthogonales x & y, Abscissis x in Axe principali AB a Vertice A computatis, quæ obtinetur ex datis distantia Foci a Vertice $AF = d$ & Semilatere recto $= c$; ubi notandum est semper esse debere $2d$ majorem quam c, quia est $AC = a = \frac{dd}{2d - c}$, & $CD = b = d\sqrt{\frac{c}{2d - c}}$. Cap. VI.

148. Quod si ego fuerit $2d = c$ erit $yy = 2cx$, quam æquationem supra vidimus esse pro Parabola: æquatio enim superior $yy = \alpha + 6x$ ad hanc formam reducitur, initio Abscissarum intervallo $= \frac{\alpha}{6}$ mutato. Sit igitur MAN Parabola, cujus natura inter Abscissam $AP = x$, & Applicatam $PM = y$ hac æquatione exprimatur $yy = 2cx$. Erit ergo distantia Foci a Vertice $AF = d = \frac{1}{2}c$, & Semiparameter $FH = c$, atque ubique $PM^2 = 2FH.AP$: unde, posita Abscissa AP infinita, simul Applicatæ PM & PN in infinitum excrescunt; ideoque Curva ad utramque Axis AP partem in infinitum extenditur. Posita autem Abscissa x negativa Applicata fit imaginaria, hincque Axi ultra A versus T nulla Curvæ portio respondet. Tab. VIII. Fig. 32.

149. Cum æquatio pro Ellipsi abeat in Parabolam, facto $2d = c$, manifestum est Parabolam nil aliud esse præter Ellipsin, cujus Semiaxis $a = \frac{dd}{2d - c}$ fit infinitus; quam ob rem proprietates omnes, quas pro Ellipsi invenimus, ad Parabolam transferentur, posito Axe a infinito. Primum autem, cum sit $AF = \frac{1}{2}c$, erit $FP = x - \frac{1}{2}c$, hinc ducta ex Foco F ad Curvæ punctum M recta FM erit, $FM^2 = xx - cx + \frac{1}{4}cc + yy = xx + cx + \frac{1}{4}cc$, ideoque $FM = x +$

 $\frac{1}{2}c =$

 $\frac{1}{2}c = AP + AF$, quæ eſt præcipua proprietas Foci in Parabola.

150. Quoniam Parabola naſcitur ex Ellipſi, Axe majore in infinitum aucto; conſideremus Parabolam, tanquam eſſet Ellipſis, ſitque ejus Semiaxis $AC = a$, exiſtente a quantitate infinita, ita ut Centrum C infinite diſtet a Vertice A. Ad M ducatur tangens Curvæ MT Axi occurrens in T; quia erat $CP : CA = CA : CT$, erit $CT = \frac{aa}{a - x}$, ob $CP = a - x$; hincque $AT = \frac{ax}{a - x}$. At, cum ſit a quantitas infinita, Abſciſſa x præ ea evaneſcet, eritque $a - x = a$, ideoque $AT = x = AP$: quod idem hoc modo oſtendi poteſt, cum ſit $AT = \frac{ax}{a - x}$, erit $AT = x + \frac{xx}{a - x}$, at quia fractionis $\frac{xx}{a - x}$ denominator eſt infinitus, numeratore exiſtente finito, valor fractionis erit evaneſcens, ideoque $AT = AP = x$.

151. Quod ſi ergo ex puncto M ad Centrum Parabolæ C infinite diſtans ducatur Linea MC, quæ erit Axi AC parallela, ea quoque erit Diameter Curvæ omnes Chordas tangenti MT parallelas biſecans. Scilicet, ſi ducatur Chorda ſeu Ordinata mn tangenti MT parallela, ea a Diametro Mp biſecabitur in p. Omnis ergo recta Axi AP parallela ducta in Parabola erit Diameter obliquangula. Ad hujuſmodi Diametrorum naturam eruendam ſit $Mp = t$, $pm = u$, ducatur ex m ad Axem normalis msr; erit, ob $PT = 2x$, & $MT = \sqrt{(4xx + 2cx)}$, $\sqrt{(4xx + 2cx)} : 2x : \sqrt{2cx} = pm : ps : ms$, unde obtinetur $ps = \frac{2xu}{\sqrt{(4xx + 2cx)}} = u\sqrt{\frac{2x}{2x + c}}$, & $ms = u\sqrt{\frac{c}{2x + c}}$; hinc erit $Ar = x + t + u\sqrt{\frac{2x}{2x + c}}$, & $mr = \sqrt{2cx} + u\sqrt{\frac{c}{2x + c}}$. Quia vero eſt $mr^2 = 2c \cdot Ar$,

erit

erit $2cx + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}} + \frac{cuu}{2x+c} = 2cx + 2ct + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}$, hincque $uu = 2t(2x+c) = 4FM.t$, seu $pm^2 = 4FM.Mp$. At anguli obliquitatis mps erit Sinus $= \sqrt{\frac{c}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AF}{FM}}$, Cosinus $= \sqrt{\frac{2x}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AP}{FM}}$, ideoque $\mathit{fin.}\ 2mps = \frac{2\sqrt{2cx}}{2x+c} = \frac{y}{FM} = \mathit{fin.}\ MFp$, ergo erit angulus $mps = MTP = \frac{1}{2} MFr$.

152. Quia est $MF = AP + AF$, ob $AP = AT$, erit $FM = FT$; ideoque triangulum MFT isosceles, & angulus $MFr = 2MTA$, ut modo invenimus. Cum deinde sit $MT = 2\sqrt{x(x+\frac{1}{2}c)}$, erit $MT = 2\sqrt{AP.FM}$, hinc ex Foco F in tangentem demisso perpendiculo erit $MS = TS = \sqrt{AP.FM} = \sqrt{AT.TF}$, unde erit $AT : TS = TS : TF$. Ex qua analogia perspicitur punctum S fore in recta AS ad Axem in Vertice A normali. Erit vero $AS = \frac{1}{2}PM$, & $AS : TS = AF : FS$, ergo $FS = \sqrt{AF.FM}$ & FS erit media proportionalis inter AF & FM. Praeterea vero erit $AS : MS = AS : TS = FS : FM = \sqrt{AF} : \sqrt{FM}$. Quod, si ducatur ad tangentem in M normalis MW Axem secans in W, erit $PT : PM = PM : PW$, seu $2x : \sqrt{2cx} = \sqrt{2cx} : PW$; unde fit $PW = c$, ubique igitur intervallum PW, quod in Axe inter Applicatam PM & normalem WM intercipitur, constantem habet magnitudinem atque aequale est semissi Lateris recti, seu Applicatae FH. Erit autem $FW = FT = FM$ & $MW = 2\sqrt{AF.FM}$.

153. Pervenimus jam ad Hyperbolam, cujus natura exprimitur hac aequatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$, Abscissis super Diametro orthogonali sumtis. Quod si autem initium Abscissarum transferatur intervallo $\frac{\beta}{2\gamma}$, orietur ejusmodi aequatio

LIB. II. $yy = \alpha + \gamma xx$, in qua Abſciſſæ a Centro computantur. Debet autem γ eſſe quantitas affirmativa; quod vero ad α attinet, perinde eſt ſive ea ſit quantitas affirmativa ſive negativa, permutatis enim Coordinatis x & y, affirmatio quantitatis α in negationem mutatur & viciſſim. Quam ob rem ſit α quantitas negativa, & $yy = \gamma xx - \alpha$, atque apparet Applicatam y bis evaneſcere: ſcilicet, ſi fuerit $x = +\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ & $x = -\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$. Denotante ergo C Centro, ſint A & B loca, ubi Axis a Curva trajicitur; ac, poſito Semiaxe $CA = CB = a$, erit $a = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$, & $\alpha = \gamma aa$, unde fit $yy = \gamma xx - \gamma aa$. Quamdiu ergo eſt x^2 minor quam a^2, Applicata erit imaginaria, unde toti Axi AB nulla Curvæ portio reſpondet. Sumto vero xx majore quam aa, Applicatæ continuo creſcunt, atque tandem in infinitum abeunt, habebit ergo Hyperbola quatuor ramos AI, Ai, BK, Bk in infinitum excurrentes & inter ſe ſimiles atque æquales, quæ eſt proprietas principalis Hyperbolarum.

TAB. IX. Fig. 33.

154. Quia, poſito $x = 0$, fit $yy = -\gamma aa$, Hyperbola non inſtar Ellipſis habebit Axem conjugatum, quod in Centro C Applicata eſt imaginaria. Erit ergo ipſe Axis conjugatus imaginarius, quem, ut aliquam ſimilitudinem Ellipſis ſervemus, ponamus $= b\sqrt{-1}$, ita ut ſit $\gamma aa = bb$, & $\gamma = \frac{bb}{aa}$. Vocata ergo Abſciſſa $CP = x$, & Applicata $PM = y$, erit $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, ideoque æquatio pro Ellipſi ante tractata $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$ tranſmutatur in æquationem pro Hyperbola ponendo $-bb$ loco bb. Ob hanc ergo affinitatem proprietates Ellipſis ante inventæ facile ad Hyperbolam transferuntur. Ac primo quidem, cum pro Ellipſi diſtantia Focorum a Centro eſſet $= \sqrt{(aa - bb)}$, pro Hyperbola erit

erit $CF = CG = \sqrt{(aa+bb)}$. Hinc erit $FP = x - \sqrt{(aa+bb)}$ & $GP = x + \sqrt{(aa+bb)}$; unde, ob $yy = - bb + \frac{bbxx}{aa}$, fiet $FM = \sqrt{(aa + xx + \frac{bbxx}{aa} - 2x\sqrt{(aa + bb)})} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} - a$ & $GM = \sqrt{(aa + xx + \frac{bbxx}{aa} + 2x\sqrt{(aa+bb)})} = \frac{x\sqrt{(aa+bb)}}{a} + a$. Ductis ergo ex utroque Foco ad Curvæ punctum M rectis FM, GM erit $FM + AC = \frac{CP.CF}{CA}$ & $GM - AC = \frac{CP.CF}{CA}$, harum ergo rectarum differentia $GM - FM$ æqualis est $2AC$. Quemadmodum ergo in Ellipsi summa harum duarum Linearum æquatur Axi principali AB, ita pro Hyperbola differentia æqualis est Axi principali AB. Cap. VI.

155. Hinc etiam positio tangentis MT definiri potest, est enim perpetuo pro Lineis secundi ordinis $CP : CA = CA . CT$: unde fit $CT = \frac{aa}{x}$, & $PT = \frac{xx - aa}{x} = \frac{aayy}{bbx}$; hincque $MT = \frac{y}{bbx}\sqrt{(b^4x^2 + a^4y^2)} = \frac{y}{bx}\sqrt{(aaxx + bbxx - a^4)}$. At est $FM.GM = \frac{aaxx + bbxx - a^4}{aa}$, ergo $MT = \frac{ay}{bx}\sqrt{FM.GM}$. Deinde est $FT = \sqrt{(aa+bb)} - \frac{aa}{x}$, & $GT = \sqrt{(aa+bb)} + \frac{aa}{x}$ ergo $FT : FM = a : x$, & $GT : GM = a : x$, unde sequitur $FT : GT = FM : GM$, quæ proportio indicat angulum FMG per tangentem MT bisecari, esseque $FMT = GMT$. Recta autem CM producta erit Diameter obliquangula omnes Ordinatas tangenti MT parallelas bisecans.

156. Demittatur ex Centro C in tangentem perpendicularis CQ, erit $TM : PT : PM = CT : TQ : CQ$ seu $\frac{ay}{bx}\sqrt{FM.GM} : \frac{aayy}{bbx} : y = \frac{aa}{x} : TQ : CQ$; unde ori-

 tur $TQ = \frac{a^3 y}{bx\sqrt{FM.GM}}$ & $CQ = \frac{ab}{\sqrt{FM.GM}}$. Demittatur ſimili modo ex Foco F in tangentem perpendiculum FS, erit $TM : PT : PM = FT : TS : FS$, ſeu $\frac{ay}{bx}\sqrt{FM.GM}$: $\frac{aayy}{bbx} : y = \frac{a.FM}{x} : TS : FS$: unde oritur $TS = \frac{aayFM}{bx\sqrt{FM.GM}}$ & $FS = \frac{b.FM}{\sqrt{FM.GM}}$; pariterque, ſi ex altero Foco G in tangentem ducatur perpendicularis Gs, erit $Ts = \frac{aay.GM}{bx\sqrt{FM.GM}}$, & $Gs = \frac{b.GM}{\sqrt{FM.GM}}$. Hinc ergo habetur $TS.Ts = \frac{a^4yy}{bbxx} = \frac{aa(xx-aa)}{xx} = CT.PT$, & $TS : CT = PT : Ts$. Deinde fit $FS.Gs = bb$. Quia porro eſt $QS = Qs$ erit $QS = \frac{TS+Ts}{2} = \frac{aay(FM+GM)}{2bx\sqrt{FM.GM}} = \frac{ay\sqrt{(aa+bb)}}{b\sqrt{FM.GM}} = Qs$, unde ſequitur $CS^2 = CQ^2 + QS^2 = \frac{aab^4 + a^4yy + aabbyy}{bb.FM.GM} = \frac{aab^4 + (aa+bb)(bbxx - aabb)}{bb.FM.GM} = \frac{(aa+bb)xx - a^4}{FM.GM} = aa$. Erit ergo, uti in Ellipſi, recta $CS = a = CA$. Deinde eſt $CQ + FS = \frac{bx\sqrt{(aa+bb)}}{a\sqrt{FM.GM}}$, ideoque $(CQ+FS)^2 - CQ^2 = \frac{bbxx(aa+bb) - a^4bb}{aa.FM.GM} = bb$. Quare; ſi ducatur ex Foco F tangenti parallela FX, ſecans perpendiculum CQ productum in X, erit $CX = \sqrt{(bb + CQ^2)}$, cui ſimilis proprietas pro Ellipſi eſt inventa.

157. Si in Verticibus A & B ad Axem perpendiculares erigantur donec tangenti occurrant in V & v, ob $AT = \frac{a(x-a)}{x}$ & $BT = \frac{a(x+a)}{x}$, $PT : PM = AT : AV = BT : Bv$, hinc fit $AV = \frac{bb(x-a)}{ay}$ & $Bv = \frac{bb(x+a)}{ay}$; ergo

$AV.Bv = \frac{b^4(xx-aa)}{aayy} = bb$, seu $AV.Bv = FS.Gs$. Cap. VI.
Deinde $PT:TM = AT:TV = BT:Tv$; ergo $TV = \frac{b(x-a)}{xy}\sqrt{FM.GM}$ & $Tv = \frac{b(x+a)}{xy}\sqrt{FM.GM}$: unde fit $TV.Tv = \frac{aa}{xx}FM.GM = FT.GT$. Simili autem modo hinc plura alia consectaria deduci possunt.

158. Quia est $CT = \frac{aa}{x}$, patet quo major capiatur Abscissa $CP = x$, eo minus futurum esse intervallum CT: atque adeo tangens, quæ Curvam in infinitum productam tangit, per ipsum Centrum C transibit, fietque $CT = 0$. Cum autem sit $tang.\, PTM = \frac{PM}{PT} = \frac{bbx}{aay}$, puncto M in infinitum abeunte, seu posito $x = \infty$, fit $y = \frac{b}{a}\sqrt{(xx-aa)} = \frac{bx}{a}$. Tangens ergo Curvæ in infinitum productæ, & per Centrum C transibit, & cum Axe angulum constituet ACD cujus tangens $= \frac{b}{a}$. Posita ergo in Vertice A ad Axem normali $AD = b$, tum recta CD in infinitum utrinque producta, Curvam nusquam quidem tanget, at Curva continuo magis ad eam appropinquabit, donec in infinitum tota cum recta CI confundatur. Hoc idem valebit de parte Ck, quæ tandem cum ramo Bk confundetur. Atque si ad alteram partem sub eodem angulo ducatur recta KCi, ea cum ramis BK & Bi in infinitum productis conveniet. Hujusmodi autem Lineæ rectæ, ad quas Linea quæpiam Curva continuo propius accedit, in infinitum autem excurrens demum attingit, Asymptotæ vocantur, unde Lineæ rectæ ICk, KCi sunt binæ Asymtotæ Hyperbolæ.

159. Asymtotæ ergo se mutuo in Centro C Hyperbolæ decussant, atque ad Axem inclinantur angulo $ACD = ACd$, cujus tangens $= \frac{b}{a}$, angulique dupli DCd tangens $= \frac{2ab}{aa-bb}$, unde

LIB. II. unde patet si fuerit $b = a$, fore angulum, sub quo Asymtotæ se intersecant, $DCd =$ recto; quo casu Hyperbola *æquilatera* dicitur. Cum autem sit $AC = a$, $AD = b$, erit $CD = Cd = \sqrt{(aa + bb)}$; quare, si ex Foco G in utramvis Asymtotam perpendiculum GH demittatur, ob $CG = \sqrt{(aa + bb)} = CD$, erit $CH = AC = BC = a$, & $GH = b$.

160. Producatur Ordinata $MPN = 2y$ utrinque donec Asymtotas secet in m & n; erit $Pm = Pn = \frac{bx}{a}$, & $Cm = Cn = \frac{x\sqrt{(aa + bb)}}{a} = FM + AC = GM - AC$. Tum vero erit $Mm = Nn = \frac{bx - ay}{a}$ & $Nm = Mn = \frac{bx + ay}{a}$, unde fit $Mm.Nm = Mm.Mn = \frac{bbxx - aayy}{aa} = bb$, ob $aayy = bbxx - aabb$: erit ergo ubique $Mm.Nm = Mm \times Mn = Nn.Nm = Nn.Mn = bb = AD^2$. Ducatur ex M Asymtotæ Cd parallela Mr; erit $2b\sqrt{(aa + bb)} = Mm : mr\ (Mr)$, unde fit $mr = Mr = \frac{(bx - ay)\sqrt{(aa + bb)}}{2ab}$ & $Cm - mr = Cr = \frac{(bx + ay)\sqrt{(aa + bb)}}{2ab}$. Hinc ergo conficietur $Mr.Cr = \frac{(bbxx - aayy)(aa + bb)}{4aabb} = \frac{aa + bb}{4}$. Vel, ducta ex A Asymtotæ Cd parallela AE, erit $AE = CE = \frac{1}{2}\sqrt{(aa + bb)}$, ideoque erit $Mr.Cr = AE.CE$; quæ est proprietas primaria Hyperbolæ ad Asymtotas relatæ.

TAB. IX. Fig. 34. 161. Quod si ergo Abscissæ $CP = x$, in una Asymtota a Centro sumantur, & Applicatæ $PM = y$ alteri Asymtotæ parallelæ statuantur, erit $yx = \frac{aa + bb}{4}$, existente $AC = BC = a$, & $AD = Ad = b$: seu, si ponatur $AE = CE = h$, erit $yx = hh$, & $y = \frac{hh}{x}$. Posito ergo $x = 0$, fit $y = \infty$, ac vicissim facto $x = \infty$ fiet $y = 0$. Agatur jam per

per punctum Curvæ M recta quæcunque $QMNR$, quæ parallela ſit ductæ pro libitu rectæ GH, ac ponatur $CQ = t$, $QM = u$, erit $GH : CH : CG = u : PQ : PM$, ergo $PQ = \frac{CH}{GH}u$, $PM = \frac{CG}{GH}u$: unde $y = \frac{CG}{GH}u$ & $x = t - \frac{CH}{GH}u$; quibus valoribus ſubſtitutis, erit $\frac{CG}{GH}tu - \frac{CH \cdot CG}{GH^2} \times uu = hh$, ſeu $uu - \frac{GH}{CH}tu + \frac{GH^2}{CH \cdot CG}hh = 0$. Habebit ergo Applicata u duplicem valorem, nempe QM & QN, quarum ſumma erit $= \frac{GH}{CH}t = QR$, & rectangulum $QM \times QN = \frac{GH^2}{CH \cdot CG}hh$. Cap. VI.

162. Cum igitur ſit $QM + QN = QR$, erit $QM = RN$ & $QN = RM$. Quare, ſi puncta M & N conveniant quo caſu recta QR Curvam tanget, tum ea in ipſo puncto contactus biſecabitur. Scilicet, ſi recta XY tangat Hyperbolam, punctum contactus Z in medio rectæ XY erit poſitum. Unde, ſi ex Z alteri Aſymtotæ parallela ducatur ZV, erit $CV = VY$, hincque ad quodvis Hyperbolæ punctum Z expedite tangens ducetur. Sumatur ſcilicet $VY = CV$, ac recta per Y & Curvæ punctum Z ducta Hyperbolam in hoc puncto Z tanget.

Cum ergo ſit $CV \cdot ZV = hh = \frac{aa + bb}{4}$, erit $CX \cdot CY = aa + bb = CD^2 = CD \cdot Cd$: quocirca, ſi rectæ DX & dY ducerentur, eæ inter ſe forent parallelæ; unde facillimus oritur modus quotcunque Curvæ tangentes ducendi.

163. Quoniam deinde eſt rectangulum $QM \cdot QN = \frac{GH^2}{CH \cdot CG} \cdot hh$, patet, ubicunque recta QR ipſi HG parallela ducatur, fore ſemper rectangulum $QM \cdot QN$ ejuſdem magnitudinis. Erit ergo etiam $QM \cdot QN = QM \cdot MR = QN \times NR = \frac{CH^2}{CH \cdot CG}hh$. Quod, ſi ergo concipiatur ducta tan-

LIB. II. gens ipſi QR parallela, quia ea intra Aſymtotas in puncto contactus biſecabitur, & ſi tangentis ſemiſſis vocetur $= q$. erit ſemper $QM . QN = QM . MR = RN . RM = RN \times NQ = qq$, quæ eſt inſignis proprietas Hyperbolarum intra Aſymtotas deſcriptarum.

164. Quoniam Hyperbola ex duabus partibus diametraliter oppoſitis IAi & KBk conſtat, iſtæ proprietates non ſolum ad eas rectas intra Aſymtotas ductas pertinent, quæ eandem Curvæ partem in duabus punctis interſecant. Sed etiam ad eas, quæ ad partes oppoſitas pertingunt. Ducatur nempe per punctum M recta $Mqrn$ ad partem oppoſitam, cui parallela agatur Gh, ac vocetur $Cq = t$ & $qM = u$; erit, ob triangula CGh & PMq ſimilia, $PM = y = \frac{CG}{Gh} u$, & $qP = x - t = \frac{Ch}{Gh} u$; unde fit $x = t + \frac{Ch}{Gh} u$. Cum autem ſit $xy = hh$, fiet $\frac{CG}{Gh} tu + \frac{CG . Ch}{Gh^2} uu = hh$, ſeu $uu + \frac{Gh}{Ch} t u - \frac{Gh^2}{CG . Ch} hh = 0$.

165. Applicata ergo u habebit duplicem valorem, nempe qM & $- qn$, hoc qn exiſtente negativo quia ad alteram partem Aſymtotæ CP pro Axe aſſumtæ vergit. Harum ergo binarum radicum ſumma $qM, - qn$ erit $= - \frac{Gh}{Ch} t = - qr$, ideoque $qn - qM = qr$, unde fit $qM = rn$, & $qn = rM$. Deinde autem ex æquatione inventa intelligitur fore radicum productum $- qM . qn = - \frac{Gh^2}{CG . Ch} hh$, ſeu $qM . qn = qM . rM = rn . qn = rn . rM = \frac{Gh^2}{CG . Ch} hh$. Hæc ergo rectangula, quotcunque rectæ Mn ipſi Gh parallelæ ducantur, perpetuo ejuſdem erunt magnitudinis. Hæ autem ſunt præcipuæ ſingularum ſpecierum Linearum ſecundi ordinis proprietates, quæ, ſi cum proprietatibus generalibus conferantur, infinita fere inſignium proprietatum multitudo conficitur.

CAPUT

CAPUT VII.

De ramorum in infinitum excurrentium investigatione.

166. SI curva Linea quæcunque habeat ramum ſeu partem in infinitum excurrentem, atque ex ejus puncto infinite diſſito ad Axem quemcunque demittatur Applicata normalis; tum, vel Abſciſſa x vel Applicata y vel utraque Coordinata, erit infinita. Niſi enim vel alterutra vel utraque eſſet infinita, tum diſtantia puncti in Curva aſſumti ab initio Abſciſſarum foret finita nempe $= \sqrt{(xx + yy)}$, contra hypotheſin. Quam ob rem, ſi Curva habeat ramum in infinitum excurrentem, vel Abſciſſæ cuipiam finitæ conveniet Applicata realis infinita, vel Abſciſſæ infinite magnæ reſpondebit Applicata realis, ſive finita ſive infinite magna. Ex hoc igitur fonte Curvarum rami in infinitum excurrentes inveſtigari poterunt.

167. Sit propoſita æquatio algebraïca inter Coordinatas x & y cujuſvis ordinis, puta n; atque ſeorſim conſiderentur termini, in quibus variabiles x & y obtinent n dimenſiones, qui erunt $\alpha y^n + \beta y^{n-1} x + \gamma y^{n-2} x^2 + \delta y^{n-3} x^3 + \ldots\ldots + \xi x^n$, quæ expreſſio reſolubilis erit in Factores ſimplices formæ $Ay + Bx$, ſive reales ſive imaginarios. Atque, ſi habeat Factores imaginarios, eorum numerus erit par, binique conjuncti dabunt Factorem duplicem realem formæ $A^2y^2 - 2ABxy \times \cos. \Phi + B^2x^2$. Hujuſmodi autem Factor, (ſive x ſive y ſive utraque, ponatur infinita $= \infty$,) ſemper valorem induet infinitum $= \infty^2$, quia terminus $2ABy x. \cos. \Phi$ ſemper minor eſt quam duo reliqui $A^2y^2 + B^2x^2$, neque enim A nec B poteſt eſſe $= 0$. Hujuſmodi ergo Factor $A^2y^2 - 2ABxy. \cos. \Phi + B^2x^2$,

L 2

LIB. II. B^2x^2, si vel x vel y vel utraque ponatur infinita, neque nihilo neque quantitati finitæ, neque etiam quantitati infinitæ ∞ potest esse æqualis, cum ipsa fiat $= \infty^2$, quæ infinities major est quam ∞.

168. Quod si ergo æquationis pars summa $\alpha y^n + \beta y^{n-1}x + \gamma y^{n-2}x^2 + \ldots\ldots\ldots + \xi x^n$ nullum habeat Factorem simplicem realem, quod quidem evenire non potest, nisi n sit numerus par, tum ex meris Factoribus duplicibus hujus formæ $A^2y^2 - 2ABxy.cos.\Phi + B^2x^2$ constabit. Quare, si vel x vel y vel utraque ponatur infinita, ipsa illa expressio valorem induet infinitum $= \infty^n$: neque igitur quantitati finitæ, neque ulli quantitati infinitæ ∞^m, cujus exponens m minor sit quam n, æqualis esse potest. Reliqua igitur æquationis membra, in quibus variabiles x & y pauciores habent dimensiones, quoniam infinita præbent minoris exponentis quam n, illud supremum infinitum adæquare non possunt; ideoque æquatio consistere non potest, si vel x vel y vel utraque statuatur infinita.

169. Hinc ergo linea Curva, quæ exprimitur æquatione inter Coordinatas x & y, cujus supremum membrum nullos habet Factores simplices reales, nullos habebit ramos in infinitum excurrentes, ideoque tota Curva continebitur in spatio finito, instar Ellipsis seu Circuli. Quam ob rem, si in æquatione generali secundi Ordinis $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$, membrum supremum, $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx$, in quo variabiles x & y duas obtinent dimensiones, non habeat Factores simplices reales, quod evenit si $\beta\beta$ sit major quam $4\alpha\gamma$, tum Curva nullum habebit ramum in infinitum excurrentem, eritque adeo Ellipsis.

170. Quo hæc distinctius evolvere liceat, omnem æquationem inter Coordinatas x & y propositam, ita in membra distin-

distinguamus, ut ad supremum seu primum referamus omnes aequationis terminos, in quibus variabiles x & y eandem summam dimensionem, cujus exponens sit n, teneant. Ad secundum vero membrum refero omnes terminos, in quibus variabiles ambae $n-1$ dimensiones constituunt. Tertium membrum continebit eos terminos, in quibus ipsorum x & y numerus dimensionum est $n-2$, & ita porro, donec perveniatur ad membrum ultimum, in quo nulla inest dimensio ipsarum x & y, & quod propterea sola quantitate constante constabit. Sit autem P membrum primum seu supremum, Q membrum secundum, R membrum tertium, S quartum & ita porro. Cap. VII.

171. Quoniam igitur, si membrum supremum P nullum habet Factorem simplicem realem, Linea curva, aequatione $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ indicata, nullum habet ramum in infinitum excurrentem; ponamus jam membrum supremum P unicum habere Factorem simplicem realem, $ay - bx$, ita ut sit $P = (ay - bx)M$, existente M Functione ipsarum x & y, dimensionum $n-1$, quae nullos habeat Factores simplices reales. Posita ergo vel x vel y vel utraque infinita, fiet $M = \infty^{n-1}$; Q vero simile poterit esse infinitum, at R, S, &c., fient infinita minorum graduum. Consequenter aequatio $P + Q + R +$ &c. $= 0$ poterit subsistere, si fuerit $ay - bx =$ quantitati finitae, vel nihilo, ideoque Curva in infinitum porrigetur.

172. Sit ergo $ay - bx = p$, existente p quantitate finita, quae ita debet esse comparata ut, Curva in infinitum abeunte, fiat $pM + Q + R + S +$ &c. $= 0$ seu $p = \frac{-Q-R-S \text{ \&c.}}{M}$. At, cum M sit quantitas infinita superioris ordinis quam R & S &c., erunt fractiones $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$, &c. $= 0$, ideoque $p = \frac{-Q}{M}$. Hanc ob rem fractio $\frac{-Q}{M}$ dabit valorem ipsius p, si varia-

 biles

LIB. II. biles x & y fiant infinitæ. Cum autem ſit $ay - bx = p$, erit $y = \frac{bx + p}{a}$ & $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{p}{ax} = \frac{b}{a}$ ob $\frac{p}{ax} = 0$ ſi $x = \infty$. Curva ergo in infinitum abeunte fit $y = \frac{bx}{a}$.

173. Cum igitur Q & M ſint Functiones homogeneæ $n-1$ dimenſionum, erit $\frac{-Q}{M}$ Functio nullius dimenſionis, ideoque ſi ponatur $y = \frac{bx}{a}$, præbebit valorem conſtantem pro p. Vel, quia Functio $\frac{-Q}{M}$ determinatur, ſi tantum ratio inter y & x determinetur, quæ eſt $b : a$, valor ipſius p obtinebitur ſi in expreſſione $\frac{-Q}{M}$, ubique b loco y & a loco x ſcribatur. Invento ergo hoc modo p erit $ay - bx = p$, quæ æquatio in ipſa æquatione propoſita $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ continetur, ſi Curva abeat in infinitum.

174. Portio itaque Curvæ in infinitum extenſa ipſa exprimetur per hanc æquationem $ay - bx = p$; quæ cum ſit pro Linea recta, hæc Linea recta in infinitum producta tandem cum Linea curva confundetur. Erit ergo Linea recta hæc Curvæ aſymtota, quoniam Linea curva in infinitum porrecta cum recta congruet, ideoque continuo propius ad eam accedet. Atque cum æquatio propoſita $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, poſito x vel $y = \infty$, abeat in æquationem $ay - bx = p$, ſimul intelligitur hanc Lineam rectam utrinque in infinitum productam tandem cum Curva congruere. Quam ob rem Linea curva duos habebit ramos in infinitum excurrentes inter ſe oppoſitos, quorum alter cum iſta Linea recta antrorſum, alter cum eadem retrorſum infinite producta conveniet.

175. Cum igitur Curva, ſi æquationis $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, membrum ſupremum P unicum habeat Factorem ſimplicem realem, prædita ſit duobus ramis in infinitum extenſis, atque ad eandem Lineam rectam utrinque convergentibus, quæ Linea recta ejus Aſymtota vocatur; nunc ponamus ſupremum

mum membrum P duos habere Factores ſimplices reales $ay - bx$ & $cy - dx$, ita ut ſit $P = (ay - bx)(cy - dx)M$, erit M Functio homogenea $n - 2$ dimenſionum. Duo autem caſus hic perpendendi veniunt, prout iſti bini Factores fuerint inter ſe æquales vel inæquales.

176. Sint hi Factores inter ſe inæquales; atque manifeſtum eſt æquationem $(ay - bx)(cy - dx)M + Q + R + S +$ &c. $= 0$, duplici modo ſubſiſtere poſſe, pro Abſciſſis vel Applicatis infinitis, vel ſi $ay - bx$ vel ſi $cy - dx$ æquetur quantitati finitæ. Sit igitur $ay - bx = p$; &, cum p ſit quantitas finita, in infinito erit $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, atque ut ante fiet $p = \frac{-Q - R - S - \text{\&c.}}{(cy - dx)M} = \frac{-Q}{(cy - dx)M}$, quæ eſt Functio nullius dimenſionis ipſarum x & y; quare, ſi ponatur $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, vel, quod eodem redit, ſi ubique ſcribatur b loco y & a loco x, verus prodibit valor conſtantis quæſitæ p. Erit ergo $p = \frac{-Q}{(bc - ad)M}$, &, ob Factores inæquales, $bc - ad$ non erit $= 0$, neque etiam M, quia nullum omnino Factorem realem ſimplicem complectitur, in nihilum abire poteſt; unde valor pro p oritur finitus, vel etiam $= 0$, quod evenit, ſi vel membrum Q prorſus deſit, vel Factorem habeat $ay - bx$.

177. Ob ſupremi ergo membri P Factorem realem ſimplicem $ay - bx$, Curva, uti in priori caſu, unam habebit Aſymtotam, cujus poſitio indicatur æquatione $ay - bx = p$. Simili vero modo, ob alterum Factorem $cy - dx$, quoque habebit Aſymtotam, quam præbebit æquatio hæc: $cy - dx = q$, exiſtente $q = \frac{-Q}{(ay - bx)M}$, poſtquam ubique loco y & x hi valores determinati d & c fuerint ſubſtituti. Quocirca Linea curva omnino duas habebit Aſymtotas, ideoque quatuor ramos in infinitum extenſos, qui cum illis rectis tandem congruant. Hic ipſe autem caſus locum ſupra invenit in Hyperbola.

LIB. II. perbola: quare, si in æquatione pro Lineis secundi ordinis $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0$ supremum membrum $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx$ duos habeat Factores simplices inæquales reales, quod evenit si $\beta\beta$ superet $4\alpha\gamma$, tum Curva erit Hyperbola.

178. Sint ambo Factores $ay - bx$ & $cy - dx$ inter se æquales ita ut sit $P = (ay - bx)^2 M$. Cum igitur sit $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, erit $(ay - bx)^2 = \frac{-Q - R - S \text{ \&c.}}{M}$. Quia autem est Q Functio $n - 1$; R $n - 2$; & S Functio $n - 3$ dimensionum, ob M Functionem $n - 2$ dimensionum erit, casu infiniti, $\frac{S}{M} = 0$, ideoque $(ay - bx)^2 = \frac{-Q}{M} - \frac{R}{M} = \frac{-Q}{M(\mu y + \nu x)}(\mu y + \nu x) - \frac{R}{M}$. At est $\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)}$ & $\frac{R}{M}$ Functio nullius dimensionis ipsarum x & y. Quare, cum in infinito sit $y : x = b : a$, si hæc ratio $\frac{b}{a}$ pro $\frac{y}{x}$ seu b pro y & a pro x substituatur, utraque illa Functio abibit in quantitatem constantem.

179. Fiat ergo, facta hac substitutione, $\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)} = A$ & $\frac{R}{M} = B$; eritque $(ay - bx)^2 = -A(\mu y + \nu x) - B$, quæ est æquatio pro Linea curva cum qua Linea curva æquatione $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ expressa, postquam in infinitum processerit, confundetur. Verum, quia quantitates μ & ν sunt arbitrariæ, sumatur $\mu = b$ & $\nu = a$, ac, immutandis Coordinatis, fiat $ay - bx = u\sqrt{(aa + bb)}$ & $by + ax = t\sqrt{(aa + bb)}$, eritque pro eadem illa Curva ista æquatio $uu + \frac{At}{\sqrt{(aa + bb)}} + \frac{B}{aa + bb} = 0$, quam patet esse pro Parabola. Curva ergo quæsita ita erit comparata, ut in infinitum protensa cum Parabola confundatur. Habebit ergo duos tantum

ramos

ramos in infinitum excurrentes, quorum Aſymtota non erit Linea recta, ſed Parabola ſuperiore æquatione expreſſa.

180. Evenit hoc ſi non fuerit $A = o$: at ſi ſit $A = o$ (quod evenit ſi membrum ſecundum Q vel deſit vel diviſibile fuerit per $ay - bx$,) tum æquatio ceſſat eſſe pro Parabola, eritque $uu + \frac{B}{aa+bb} = o$, cujus tres caſus erunt evolvendi. Primo ſcilicet, ſi B fuerit quantitas negativa, puta $\frac{B}{aa+bb} = -ff$, æquatio $uu - ff = o$ duas in ſe complectetur æquationes $u - f = o$ & $u + f = o$, quæ erunt pro duabus Lineis rectis inter ſe parallelis, quarum utraque erit Curvæ Aſymtota, uti caſu primo: atque ideo Curva quatuor habebit ramos in infinitum excurrentes qui cum iſtis duabus rectis confundentur.

181. Secundus caſus eſt quod ſit B quantitas affirmativa, puta $+ff$. Quia vero hoc caſu æquatio $uu + ff = o$ eſt impoſſibilis, Curva nullum habebit ramum in infinitum excurrentem, ſed tota in ſpatio finito continebitur. Non ſolum igitur Curva, quæ hac æquatione $P + Q + R + S + \&c. = o$, continetur, nullum habebit ramum in infinitum extenſum, ſi membrum ſupremum P nullum habeat Factorem ſimplicem realem, ſed etiam idem uſu venire poteſt, quamvis P habeat Factores, uti modo vidimus. Plures autem hujuſmodi caſus adhuc occurrent.

182. Tertius caſus eſt quo fit etiam $B = o$, in quem uterque præcedentium incidere poteſt, ex quo ambiguum eſt, quomodo Curva futura ſit comparata. Hinc ad figuram Curvæ definiendam ſequentes termini ſpectari debebunt. Scilicet, cum ſit $P + Q + R + S + \&c. = o$, atque $P = (ay - bx)^2 M$, in infinito erit $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$; & $(ay - bx)^2 + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} + \frac{T}{M} + \&c.$. Ponatur ergo, ut ante, facta ſubſtitutione $\frac{y}{x} =$

LIB. II. $\frac{b}{a}$, $\frac{Q}{M} = A(by + ax)$, $\frac{R}{M} = B$; tum vero cum S, T, V, &c., ſint Functiones $(n - 2)$, $(n - 3)$, &c. dimenſionum, exiſtente M Functione $(n - 1)$ dimenſionum, $\frac{S(by + ax)}{M} = C$; $\frac{T(by + ax)^2}{M} = D$; $\frac{V(by + ax)^3}{M} = E$ &c., erit $(ay - bx)^2 + A(by + ax) + B + \frac{C}{by + ax} + \frac{D}{(by + ax)^2} + \frac{E}{(by + ax)^3} +$ &c. $= 0$. Hæc ergo æquatio exprimit naturam curvæ Lineæ, cujus portio in infinitum diſtans, quæ prodit ſi $by + ax$ ponatur infinitum, conveniet cum Curva in æquatione $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, contenta. Quamvis enim, Curva in infinitum excurrente, $(ay - bx)^2$ valorem obtineat vel finitum vel infinitum ordinis tamen inferioris quam ∞^2, tamen $by + ax$ valorem habebit infinitum.

183. Mutemus autem Axem, ad quem Lineam iſtam Aſymtotam inventam referamus, ac in eo ponamus Abſciſſam $\frac{ax + by}{\sqrt{(aa + bb)}} = t$, & Applicatam, $\frac{ay - bx}{\sqrt{(aa + bb)}} = u$; ſitque, brevitatis gratia, $\sqrt{(aa + bb)} = g$, atque erit æquatio $uu + \frac{At}{g} + \frac{B}{gg} + \frac{C}{g^3 t} + \frac{D}{g^4 tt} + \frac{E}{g^5 t^3} +$ &c. $= 0$. Cum igitur in caſu, quem evolvere debemus, ſit $A = 0$, & $B = 0$, fiet $uu + \frac{C}{g^3 t} + \frac{D}{g^4 tt} + \frac{E}{g^5 t^3} +$ &c. $= 0$. Quod, ſi jam non fuerit $C = 0$, poſito t infinito, termini $\frac{D}{g^4 tt} + \frac{E}{g^5 t^3} +$ &c., præ $\frac{C}{g^3 t}$ evaneſcent, eritque $uu + \frac{C}{g^3 t} = 0$; qua æquatione natura Lineæ curvæ continetur, quæ, poſito $t = \infty$, cum Curva quæſita confundetur. Quare, cum hinc ſit $u = \pm\sqrt{\frac{-C}{g^3 t}}$ Curva duos habebit ramos ad eamdem Axis partem utrinque convergentes.

184. Quod ſi inſuper fuerit $C = 0$, tum ſumenda eſt iſta æquatio

æquatio $uu + \frac{D}{g^4 tt} = 0$, ubi iterum tres casus occurrunt prout D fuerit quantitas affirmativa, vel negativa, vel nulla. Primo casu, ob æquationem impossibilem, Curva nullum habebit ramum in infinitum excurrentem, sed tota continebitur in spatio finito. Secundo casu, si $\frac{D}{g^4} = -ff$ ob $uu = \frac{ff}{tt}$; quia posito tam $t = +\infty$ quam $t = -\infty$, Applicata u duplicem obtinet valorem evanescentem, affirmativum & negativum,. Curva habebit quatuor ramos ad Axem utrinque ad utramque partem convergentes. Tertio autem casu, quo $D = 0$, sumenda est æquatio $uu + \frac{E}{g^5 t^3} = 0$, cujus par est ratio, atque in §. præcedente: sicque consideratio continuari debebit, quoad æquatio $P + Q + R + S +$ &c., terminos ulteriores suppeditat.

185. Ponamus nunc membrum supremum P æquationis $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, tres habere Factores simplices reales; atque manifestum est, si isti Factores fuerint inter se inæquales, tum de unoquoque valere ea, quæ supra de unico Factore reali sunt exposita; quo ergo casu Curva habebit sex ramos in infinitum excurrentes, ad tres Lineas rectas Asymtotas convergentes. Si bini Factores fuerint æquales, tum de tertio inæquali idem erit tenendum, quod ante: at de duobus æqualibus eadem præcepta sunt notanda, quæ ante dedimus. Tantum ergo superest casus tertius evolvendus, quo omnes tres Factores sunt inter se æquales. Sit igitur $P = (ay - bx)^3 M$. Et, quia æquatio $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, subsistere non potest in infinito, nisi $(ay - bx)^3$ habeat valorem vel finitum, vel infinitum quidem at ordinis inferioris quam ∞^3, quo potestas infiniti, in quam membrum supremum P abit, fiat minor quam ∞^n; erit utique in infinito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$.

186. Ad hunc casum exponendum primum spectari oportet membrum secundum Q, utrum id Factorem habeat eundem $ay - bx$ an secus: ubi notandum est si omnino desit, tum

LIB. II. in priori contineri, quia nihilum quemcunque Factorem agnoscit. Primum itaque non sit Q per $ay - bx$ divisibile. Et, cum Q sit Functio $n - 1$ dimensionum, M vero Functio $n - 3$ dimensionum, erit $\frac{Q}{(ax + by)^2 M}$ Functio nullius dimensionis, ideoque posito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, abibit in quantitatem constantem, quæ sit $= A$, eritque $(ay - bx)^3 + A(ax + by)^2 = 0$, sequentia enim membra præbebunt terminos, qui in infinito præ $A(ax + by)^2$ evanescunt.

187. Linea igitur curva, quæ hac æquatione exprimitur, ita erit comparata, ut in infinitum producta cum Linea curva æquatione $P + Q + R + S +$ &c., expressa congruat. Ad illam autem propius cognoscendam, eam ad alium Axem referamus, in quo sit Abscissa $t = \frac{ax + by}{g}$ & Applicata $u = \frac{ay - bx}{g}$ posito $\sqrt{(aa + bb)} = g$, eritque $u^3 + \frac{Att}{g} = 0$, quæ æquatio, si ponatur $t = \infty$, dabit partem Curvæ quæsitæ $P + Q + R +$ &c. $= 0$, in infinito existentem. Quare, si figura Curvæ $u^3 + \frac{Att}{g} = 0$, cognita fuerit, simul Curvæ $P + Q + R +$ &c. $= 0$, portionis infinitæ figura erit cognita. In Capite autem sequente has Lineas curvas Asymtotas data opera evolvemus.

188. Quod si membrum secundum Q Factorem habeat $ay - bx$; vel simul erit divisibile per $(ay - bx)^2$, vel secus. Ponamus non esse divisibile per $(ay - bx)^2$, ac sumatur ista Functio nullius dimensionis $\frac{Q}{(ay - bx)(ax + by)M}$, quæ, posito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, præbeat istam quantitatem constantem A, eritque $(ay - bx)^3 + A(ay - bx)(ax + by) + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} +$ &c $= 0$. Hic erit $\frac{R}{M}$, posito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ vel $B(ay - bx)$ vel

$B(ax +$

$B(ax+by)$, prout R fuerit per $ay - bx$ divisibile vel minus; verum $\frac{S}{M}$ erit quantitas constans C. Hinc, ista æquatione ad alium Axem relata, inter Coordinatas t & u, ut ante fecimus, ea erit vel $u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bu}{gg} + \frac{C}{g^3} = 0$, vel $u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bt}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$. Quia autem tantum casus huc spectat cum $t = \infty$, termini ultimi evanescunt. Eritque ergo priori casu $u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bu}{gg} = 0$, quæ duplicem præbet Asymtotam nempe & $u = 0$, & $uu + \frac{At}{g} = 0$, alteram rectam, alteram Parabolam. Posteriori casu quoque, existente $t = \infty$, vel u habebit valorem finitum, eritque, ob finita præ infinitis evanescentia, $\frac{Atu}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$, ideoque $u = -\frac{B}{Ag}$ pro Linea recta. Præterea vero u valorem infinitum habere poterit; sicque, evanescente termino tertio, fiet $u^2 + \frac{At}{g} = 0$, pro Parabola. Quare utroque casu duplex prodit Asymtota, altera recta altera Parabola, ex quo hos casus a se distingui non opus est. Cap. VII.

189. Sit Q etiam per $(ay - bx)^2$ divisibile, atque prout R per $(ay - bx)$ fuerit divisibile vel secus, iisdem, quibus ante, operationibus institutis, prodibunt inter t & u hæ æquationes: vel $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, vel $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$. Prior casus est pro tribus Lineis rectis inter se parallelis, si quidem omnes æquationis $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$ radices fuerint reales, vel pro unica recta Asymtota, si duæ radices fuerint imaginariæ. Hinc vero varietates nascuntur prout trium istarum Asymtotarum inter se parallelarum vel bi-

 næ vel omnes coincidunt. Poſterior autem caſus $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$, poſito $t = \infty$, locum habere nequit niſi u ſit infinitum, ideoque terminus $\frac{Au^2}{g}$ præ primo u^3 evaneſcet, eritque $u^3 + \frac{Bt}{g^2} = 0$, æquatio pro Aſymtota curvilinea ordinis tertii.

190. Sin autem fuerit $A = 0$, $B = 0$, & $C = 0$, tum recurrendum eſt ad terminos æquationis $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ ſequentes, qui præbebunt hujuſmodi æquationem $u^3 + \frac{D}{g^4 t} + \frac{E}{g^5 t^2} + \frac{F}{g^6 t^3} +$ &c. $= 0$, in qua, niſi ſit $D = 0$, tertius cum ſequentibus evaneſcit, ut ſit $u^3 + \frac{D}{g^4 t} = 0$; ſin & $D = 0$, erit $u^3 + \frac{E}{g^5 t^2} = 0$; &, ſi etiam $E = 0$, erit $u^3 + \frac{F}{g^6 t^3} = 0$, &c., quæ æquationes Lineas curvas denotant, quæ, poſito $t = \infty$, cum Curva in æquatione $P + Q + R +$ &c. $= 0$, contenta congruant. Iſtæ autem æquationes, quia ineſt poteſtas impar u^3, ſemper ſunt reales, ideoque certo ramos in infinitum excurrentes, declarant. Interim tamen pro his iiſdem caſibus Linea recta æquatione $u = 0$, expreſſa quoque erit Aſymtota, quia eſt Aſymtota Curvarum $u^3 + \frac{D}{g^4 t} = 0$, $u^3 + \frac{E}{g^5 t^2} = 0$ &c.

191. Cum igitur rami Curvarum ad Aſymtotam rectam convergentes tantopere diſcrepare queant, convenit hanc diverſitatem diligentius perpendere, quod fiet, ſi Linea curva ſimpliciſſima definiatur, quæ ad eandem Aſymtotam rectam relata cum Curva propoſita confundatur. Sic, etſi æquatio $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, ſi radices omnes habeat reales, tres oſtendit Aſymtotas rectas inter ſe parallelas, tamen nondum

patet

patet utrum crura Curvæ in infinitum extensa sint Hyperbolica, hoc est æquatione $u = \frac{C}{t}$ expressa, an alius generis, veluti æquatione $u = \frac{C}{tt}$, vel $u = \frac{C}{t^3}$ &c., expressa. Ad hoc cognoscendum sumatur sequens proximus terminus quem æquatio suggerit, nempe $\frac{D}{g^4 t}$, vel, si hic desit, $\frac{E}{g^5 t^2}$, vel etiam, hoc deficiente, $\frac{F}{g^6 t^3}$. Sumamus, ut rem generaliter absolvamus, terminum sequentem esse $\frac{K}{t^k}$: atque ex natura æquationis $P + Q + R +$ &c. $= 0$, quæ est n dimensionum, patet k non posse esse numerum majorem quam $n - 3$. Sint æquationis $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, radices seu Factores $(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma)$, eritque $(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma) - \frac{K}{t^k} = 0$. Sit $u - \alpha = \frac{I}{t^\mu}$, quæ æquatio exprimet naturam unius Asymtotæ, eritque $\frac{I}{t^\mu}(\alpha - \beta + \frac{I}{t^\mu})(\alpha - \gamma + \frac{I}{t^\mu}) = \frac{K}{t^k}$; &, posito t infinito, fit $\frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)I}{t^\mu} = \frac{K}{t^k}$.

192. Æquatio hæc obtinet, si radix α fuerit inæqualis reliquis radicibus β & γ, hocque casu fiet $I = \frac{K}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$ & $\mu = k$, unde radix $u = \alpha$ suppeditabit istam Asymtotam Curvilineam $u - \alpha = \frac{K}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)t^k}$. Si ergo omnes tres radices fuerint inter se inæquales, singulæ hujusmodi Asymtotas præbebunt. Sin autem duæ radices sint æquales, puta

LIB. II. puta $\beta = \alpha$, binæ Aſymtotæ coaleſcent in unam, eritque $\frac{I^2(\alpha - \gamma)}{t^{2\mu}} = \frac{K}{t^k}$, unde fit $I^2 = \frac{K}{\alpha - \gamma}$ & $2\mu = k$. Quare hujus duplicis Aſymtotæ natura exprimetur hac æquatione $(u - \alpha)^2 = \frac{K}{(\alpha - \gamma)t^k}$. Si omnes tres radices fuerint æquales, ideoque tres Aſymtotæ in unam concreſcant, ejus natura exprimetur hac æquatione $(u - \alpha)^3 = \frac{K}{t^k}$.

193. Quod ſi æquationis $P + Q + R + S +$ &c., ſupremum membrum P quatuor habeat Factores ſimplices reales, ſi ii fuerint vel omnes inæquales inter ſe, vel bini æquales, vel etiam tres æquales, ex antecedentibus natura ramorum in infinitum excurrentium una cum Aſymtotis colligetur. Unicus ergo caſus, quo omnes radices ſunt inter ſe æquales, explanatione indiget. Sit igitur $P = (ay - bx)^4 M$, ut ſit M Functio $n - 4$ dimenſionum; atque, ſi in Functionibus nullius dimenſionis, uti ſupra, ponatur $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, ut præbeant quantitates conſtantes, ſimulque ponatur, mutato Axe, $t = \frac{ax + by}{g}$ & $u = \frac{ay - bx}{g}$, exiſtente $g = \sqrt{(aa + bb)}$, pro Lineis Aſymtotis ſequentes inter t & u orientur æquationes. Primum ſcilicet, ſi Q non fuerit diviſibile per $ay - bx$, habebitur $u^4 + \frac{At^3}{g} = 0$.

194. Deinde, ſi Q ſit diviſibile quidem per $ay - bx$ at non per $(ay - bx)^2$, prodibit $u^4 + \frac{Attu}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$, in qua, poſita $t = \infty$, Applicata u poteſt eſſe vel quantitas finita vel infinita, ergo duplex prodit Aſymtota, recta ſcilicet $u + \frac{B}{gA} = 0$, & Curva $u^3 + \frac{Att}{g} = 0$. Quod ad rectam attinet, ad eam propius cognoſcendam ſumatur terminus ſequens proximus,

ximus, qui ſit $\frac{K}{t^k}$, ac reperietur $u + \frac{B}{gA} + \frac{gK}{At^{k+2}} = 0$, Cap.VII.
quæ eſt æquatio pro Curva, cujus pars reſpondens Abſciſſæ $t = \infty$ cum Curva quæſita confundetur.

195. Sit nunc Q diviſibile per $(ay - bx)^2$ at non per $(ay - bx)^3$, videndum eſt utrum R ſit diviſibile per $ay - bx$ an ſecus. Priori caſu prodibit $u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btu}{gg} + \frac{Ct}{g^3} = 0$; poſteriori vero $u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btt}{gg} + \frac{Ct}{g^3} = 0$. Prior caſus duplicem dat æquationem, prout u eſt finitum aut infinitum, ideoque reſolvitur in has duas æquationes $uu + \frac{Bu}{gA} + \frac{C}{ggA} = 0$, & $u^2 + \frac{At}{g} = 0$; quarum illa, ſi radices habet ambas reales & inæquales, præbet duas rectas parallelas, ſin autem radices ſint imaginariæ, nullum oſtendit ramum in infinitum excurrentem: hæc vero $u^2 + \frac{At}{g} = 0$, dat Parabolam Aſymtotam. Poſterior æquatio $u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$, (ob evaneſcentem $\frac{Ct}{g^3}$ præ $\frac{Btt}{gg}$, facto $t = \infty$,) duas continet æquationes formæ $uu + \alpha t = 0$, ideoque duæ prodeunt Parabolæ Aſymtotæ, ſi fuerit A^2 major quam $4B$, quæ in unam coeunt ſi $A^2 = 4B$, at penitus imaginariæ evadunt ſi A^2 minor quam $4B$, quo caſu nullus Curvæ ramus in infinitum excurrens deſignatur.

196. Sit jam Q diviſibile per $(ay - bx)^3$; atque, prout R & S fuerint diviſibilia vel non per $ay - bx$, obtinebuntur ſequentes æquationes.

$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Bu^2}{g^2} + \frac{Cu}{g^3} + \frac{D}{g^4} = 0$$

$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Bu^2}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} = 0$$

$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{But}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} = 0$$

$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$$

Harum æquationum prima eſt pro quatuor rectis inter ſe parallelis, ſi quidem omnes radices fuerint reales & inæquales, radices autem æquales duas pluresve in unam colligent. At vero radices imaginariæ penitus vel duas vel omnes e medio tollunt. In æquatione ſecunda, ob $t = \infty$, Applicata u non poteſt non eſſe infinita, eritque ergo $u^4 + \frac{Ct}{g^3} = 0$, Aſymtota Curva quarti ordinis. Ex æquatione tertia finitum valorem habere poteſt $u + \frac{C}{gB} = 0$, præterea vero habet hanc $u^3 + \frac{Bt}{gg} = 0$, Lineam tertii ordinis pro Aſymtota. Denique æquatio quarta, ob u infinitum ſi $t = \infty$, abit in $u^4 + \frac{Btt}{gg} = 0$, quæ æquatio, ſi B eſt quantitas affirmativa, eſt impoſſibilis, ſin negativa, deſignat duas Parabolas ad Verticem oppoſitas, quæ in infinitum productæ cum Curva confunduntur.

197. Ex his igitur jam via patet, qua ulterius progredi licet, ſi plures Factores ſimplices ſupremi membri P inter ſe fuerint æquales. Quod enim ad Factores inæquales attinet, eorum quiſque ſeorſim conſiderari atque Linea recta Aſymtota ex eo nata definiri poteſt. Sin autem duo Factores fuerint æquales, tum per ea, quæ §. §. 178. *& ſequentibus* ſunt tradita, indoles Curvæ definiri poteſt; Similique modo pro tribus Factoribus æqualibus negotium conficient §. §. 185. *& ſequentes*; atque caſum, quo quatuor Factores ſunt æquales, modo evolvi-

evolvimus, ex quo simul plurium Factorum æqualitas tractari potest. Ceterum, hinc perspicitur quanta multiplicitas ac varietas in Lineis curvis tantum ratione ramorum in infinitum excurrentium locum habere queat; varietatem enim, quæ in spatio finito inesse potest, nondum attigimus. Cap. VIII.

CAPUT VIII.

De Lineis Asymtotis.

198. IN Capite præcedente vidimus plures dari Asymtotarum species; præter Lineam rectam enim invenimus plures Lineas curvas Asymtotas hac æquatione $u^{\mu} = Ct^{\nu}$ expressas. Atque ipsa Linea recta suppeditavit alias Asymtotas Curvilineas, cum quibus Linea curva magis convergat, quam cum Linea recta. Quoties autem Linea recta reperitur esse Asymtota cujuspiam Curvæ, toties Linea curva eandem rectam pro Asymtota habens assignari poterit, quæ etiam sit Asymtota Curvæ propositæ. Hujusmodi autem Asymtota Curvilinea multo accuratius exprimit indolem Curvæ, cujus est Asymtota; ostendit enim simul ramorum numerum cum recta convergentium, atque plagam, utrum supra an infra, an antrorsum retrorsumve ad rectam appropinquent.

199. Hæc igitur infinita Asymtotarum varietas commodissime in ordinem digeretur, si ipsum fontem, unde eas sumus adepti, sequamur. Alias scilicet Asymtotas præbent singuli membri supremi Factores inter se inæquales, alias bini Factores æquales, alias terni æquales, alias quaterni, & ita porro. Sit itaque proposita æquatio cujusque ordinis n inter Coordinatas x & y, quæ sit $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, ubi P sit membrum supremum continens omnes terminos n dimensionum, Q sit membrum secundum continens terminos $n - 1$

 dimen-

Lib. II. dimensionum, similique modo R tertium, S quartum, & ita porro.

Tab. X. Fig. 35. 200. Sit jam $ay - bx$ Factor simplex ipsius P, cui alius similis non adsit; ac ponatur $P = (ay - bx)M$, eritque M Functio homogenea $n - 1$ dimensionum non divisibilis per $ay - bx$. Sit nimirum AZ Axis, in quo sit Abscissa $AP = x$ & Applicata $PM = y$. Quo Factor $ay - bx$ succinctius exprimatur, sumatur alia recta AX pro Axe secans priorem in ipso Abscissarum initio A & faciens angulum XAZ, cujus tangens $= \frac{b}{a}$, ideoque sinus $= \frac{b}{\sqrt{(aa + bb)}}$ & cosinus $= \frac{a}{\sqrt{(aa + bb)}}$. In hoc Axe ponatur Abscissa $AQ = t$, & Applicata $QM = u$; erit, ductis Pg, Pf novis Coordinatis u & t parallelis, $Pg = Qf = \frac{bx}{\sqrt{(aa + bb)}}$; $Ag = \frac{ax}{\sqrt{(aa + bb)}}$; $Mf = \frac{ay}{\sqrt{(aa + bb)}}$; $Pf = Qg = \frac{by}{\sqrt{(aa + bb)}}$; ideoque $t = Ag + Qg = \frac{ax + by}{\sqrt{(aa + bb)}}$; & $u = Mf - Qf = \frac{ay - bx}{\sqrt{(aa + bb)}}$. Erit ergo nunc Applicata u Factor supremi membri P.

201. Ex his erit vicissim $y = \frac{au + bt}{\sqrt{(aa + bb)}}$ & $x = \frac{at - bu}{\sqrt{(aa + bb)}}$; qui valores si in æquatione $P + Q + R +$ &c. $= 0$, substituantur, prodibit æquatio pro Curva eadem ad Axem AX relata, inter t & u. Ut autem coëfficientium multitudinem evitemus, sustineant α, β, γ, δ, &c. loca omnium coëfficientium; ac, facta substitutione, singulæ litteræ sequentes valores induent.

$M =$

$$M = \alpha t^{n-1} + \alpha t^{n-2} u + \alpha t^{n-3} u^2 + \&c.$$
$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2} u + \beta t^{n-3} u^2 + \&c.$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \&c.$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \&c.$$
$$T = \varepsilon t^{n-4} + \varepsilon t^{n-5} u + \varepsilon t^{n-6} u^2 + \&c.$$
$$\&c.$$

CAP. VIII.

Quia autem, ad Aſymptotam inveniendam, Abſciſſam t infinitam ſtatui oportet, in quovis membro omnes termini præ primo evaneſcent. Quare, ſi cujuſvis terminus primus adſit, ſequentes negligi poſſunt; ſin primus deſit, capiatur ſecundus; ſin primus & ſecundus deſint, a tertio erit incipiendum.

202. Quia u non dividit Functionem M, ejus primus terminus deeſſe non poteſt: fiet ergo $\alpha t^{n-1} u + \beta t^{n-1} = 0$, unde pro u oritur valor finitus, qui ſit $= c$: hoc eſt recta Axi AX parallela ab eoque intervallo c diſtans erit Aſymtota. Jam, ad Aſymtotam curvilineam magis ad ipſam Curvam accedentem inveniendam, ponatur ubique, præterquam in primo termino, $u = c$, ac reperietur hæc æquatio $\alpha t^{n-1} u + \beta t^{n-1} + t^{n-2}(\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + \&c. = 0$; vel, ob $\alpha u + \beta = u - c$, erit $(u - c) t^{n-1} + t^{n-2}(\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + \&c. = 0$. Niſi jam terminus ſecundus deſit, omnes ſequentes negligi poſſunt, fietque $(u - c) + \frac{A}{t} = 0$; ſi ſecundus deſit, tertius ſumatur, eritque $(u - c) + \frac{A}{tt} = 0$. Tertio vero etiam deficiente, fiet $(u - c) + \frac{A}{t^3} = 0$, & ita porro. Si omnes, præter ultimum conſtantem, deficiant, erit

 $(u - c)$

LIB. II. $(u - c) + \frac{A}{t^{n-1}} = 0$. Prorsus autem omnes si deessent, tota æquatio divisibilis foret per $u - c$, ideoque ipsa recta $u - c = 0$, foret Curvæ portio.

203. Si ponatur $u - c = z$; seu, si Abscissæ in ipsa Asymtota recta capiantur, omnes Asymtotæ curvilineæ, quas unicus supremi membri Factor suppeditat, in hac æquatione generali comprehenduntur $z = \frac{C}{t^k}$, denotante k numerum quemvis integrum exponente n minorem. Quemadmodum ergo hæ Asymtotæ curvilineæ sint comparatæ, si Abscissa t ponatur infinita, videamus. Sit ergo XY Asymtota recta pro Axe sumta, & A initium Abscissarum, ducta recta CD orientur quatuor regiones, quas litteris P, Q, R & S designemus. Sit nunc primum $z = \frac{C}{t}$: &, quia sumto t negativo, fit z quoque negativa, Curva duos habebit ramos EX & FY in regionibus oppositis P & S ad rectam XY convergentes. Idem eveniet, si k fuerit numerus quicunque impar. At, si fuerit $k = 2$, seu $z = \frac{C}{tt}$, quia, sive t statuatur affirmativa sive negativa, z perpetuo affirmativa manet, Curva constabit duobus ramis EX & FY in regionibus P & Q ad rectam XY convergentibus; quod idem contingit, si k fuerit numerus par quicunque, hoc tantum discrimine, quod convergentia eo fiat promtior, quo major sit exponens k.

TAB. X. Fig. 36.

TAB. X. Fig. 37.

204. Habeat supremum membrum P binos Factores $ay - bx$ inter se æquales; atque facta eadem, qua ante, ad alium Axem translatione, fiet

$P =$

$$P = \quad + \alpha t^{n-2} u^2 + \alpha t^{n-3} u^3 + \&c.$$

$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2} u + \beta t^{n-3} u^2 + \beta t^{n-4} u^3 + \&c.$$

$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \gamma t^{n-5} u^3 + \&c.$$

$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \delta t^{n-6} u^3 + \&c.$$

&c.

Hinc, prout primus membri Q terminus affuerit, five minus, duæ oriuntur æquationes

I.

$$\alpha t^{n-2} u^2 + \beta t^{n-1} = 0$$

feu

$$\alpha u^2 + \beta t = 0$$

I I.

$$\alpha t^{n-2} u^2 + \beta t^{n-2} u + \gamma t^{n-2} = 0$$

feu

$$\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0.$$

Quod fi ergo prima æquatio $\alpha u^2 + \beta t = 0$, locum habet, Afymtota fit Parabola, cum cujus ambobus ramis duo Curvæ rami in infinito confundentur. Curva ergo in binis regionibus P & R ramos habebit cum Parabola EAF denique congruentes. TAB. X. *Fig.* 38.

205. Sin autem altera æquatio $\alpha u u + \beta u + \gamma = 0$, refultet, tum videndum eft an habeat duas radices reales an fecus. Pofteriori cafu enim hac æquatione nulli prorfus rami in infinitum excurrentes denotantur. Sint ergo ambæ radices reales & inæquales, altera $u = c$, altera $u = d$, atque Curva duas habebit Afymtotas rectas inter fe parallelas. Cujusnam vero utraque fit indolis, ut ante, inveftigabimus; fcilicet, cum fit $\alpha u u + \beta u + \gamma = (u - c)(u - d)$, ponatur ubique $u = c$, præterquam in Factore $u - c$, ac prodibit $(c - d) t^{n-2} (u - c)$

 $(u-c)+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+\gamma c^2+\delta c+\varepsilon)+$ &c. $=0$. Nisi ergo secundus terminus evanescat, sequentes omnes, posito $t=\infty$, evanescent, eritque Asymtota $(u-c)+\frac{A}{t}=0$; si terminus secundus evanescat, fiet $(u-c)+\frac{A}{t^2}=0$, atque ita porro. Si omnes termini, præter ultimum constantem, fuerint $=0$, erit $(u-c)+\frac{A}{t^{n-2}}=0$, quarum Curvarum figuras, si $t=\infty$, jam supra omnes descripsimus.

206. At, si ambæ radices æquationis $\alpha uu+\beta u+\gamma=0$, fuerint æquales, seu $\alpha uu+\beta u+\gamma=(u-c)^2$, quia $u=c$, si hic valor in reliquis terminis substituatur, prodibit ista æquatio, $t^{n-2}(u-c)^2+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+\gamma c^2+\delta c+\varepsilon)+$ &c. $=0$: unde, prout, excepto primo, vel non desit secundus, vel non desit tertius deficiente primo, vel non quartus deficientibus secundo & tertio, sequentes oriuntur æquationes pro Asymtotis:

$$(u-c)^2+\frac{A}{t}=0;$$

$$(u-c)^2+\frac{A}{tt}=0;$$

$$(u-c)^2+\frac{A}{t^3}=0;$$

usque ad

$$(u-c)^2+\frac{A}{t^{n-2}}=0;$$

Si omnes termini præter ultimum constantem desint. Verum si etiam ultimus evanesceret, foret $(u-c)^2=0$, ideoque Linea recta ipsa foret Curvæ portio, Curvaque adeo complexa.

207. Quanquam sic omnes casus, quos duo Factores æquales præbeant,

præbeant, enumerati videntur, tamen ultima æquatio alias adhuc induere poteſt formas, unde diverſæ Aſymtotæ ſequuntur. Evenit hoc, ſi Factor poteſtatis t^{n-3} per $u-c$ diviſibilis deprehendatur: tum enim, uti in primo termino, relinquatur $u-c$ ac adjiciatur inſuper terminus ſequens qui proxime adeſt, hocque caſu ejuſmodi emergent æquationes

CAP. VIII.

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{tt}=0$$

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^3}=0$$

uſque ad

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^{n-2}}=0.$$

Sin autem ſecundus terminus penitus deſit, vel per $(u-c)^c$ diviſibilis fuerit, tum ſpectetur terminus tertius, qui ſi per $u-c$ diviſibilis deprehendatur, in eo $u-c$ relinquatur, atque præterea ſequens proximus terminus adjungatur. Hocque caſu ejuſmodi orientur æquationes

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{tt}+\frac{B}{t^3}=0$$

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{tt}+\frac{B}{t^4}=0$$

uſque ad

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{tt}+\frac{B}{t^{n-2}}=0.$$

Quod ſi etiam tertius terminus deſit, & quartus per $u-c$ diviſibilis reperiatur, vel etiam hoc deficiente quintus, & ita porro, naſcetur hujuſmodi æquatio pro Curva Aſymtota,

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t^p}+\frac{B}{t^q}=0,$$

 ubi

LIB. II. ubi exponens p semper minor erit quam q, & q minor quam $n - 1$.

208. Ponamus $u - c = z$, atque hæ æquationes omnes in hac forma $zz - \frac{Az}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0$, continentur. Ad quam evolvendam tres casus sunt spectandi, prout fuerit q major quam $2p$, vel q æqualis $2p$, vel q minor quam $2p$.

Casu primo, quo q superat $2p$; duæ æquationes in illa continentur, $z - \frac{A}{t^p} = 0$, & $Az - \frac{B}{t^{q-p}} = 0$: utraque enim, facto $t = \infty$, satisfacit. Nam, posito $z = \frac{A}{t^p}$, æquatio superior abit in $\frac{A^2}{t^{2p}} - \frac{AA}{t^{2p}} + \frac{B}{t^q}$, seu $A^2 - A^2 + \frac{B}{t^{q-2p}} = 0$, quod, ob q majorem quam $2p$, verum est, erit autem p minor quam $\frac{n-2}{2}$.

At, si $z = \frac{B}{At^{q-p}}$, fiet $\frac{BB}{A^2 t^{2q-2p}} - \frac{B}{t^q} + \frac{B}{t^q}$, seu $\frac{BB}{A^2 t^{q-2p}} - B + B = 0$, quod verum est ob terminum primum evanescentem facto $t = \infty$. Hoc ergo casu super eadem Asymtota recta duæ habentur Asymtotæ curvilineæ, ideoque quatuor rami in infinitum excurrentes.

Secundus casus, quo $q = 2p$, præbet æquationem $zz - \frac{Az}{t^p} + \frac{B}{t^{2p}} = 0$, quæ, vel est imaginaria, si AA minor quam $4B$, quo casu nulla Asymtota extat, vel duas præbet Asymtotas similes $z = \frac{C}{t^p}$, si AA major quam $4B$.

In tertio casu, si q minor quam $2p$, æquationis medius terminus semper

ſemper evaneſcit, poſito $t = \infty$; eritque ergo $zz + \frac{B}{t^q} = 0$, æquatio pro una Aſymtota. Formas quidem præcedentium Aſymtotarum jam expoſuimus, quare iſtas Aſymtotas hac forma $zz = \frac{C}{t^k}$ contentas examinemus. CAP. VIII.

209. Si igitur Axis in ipſa Aſymtota recta $u = c$ ſumatur, & Applicata $u - c$ ponatur $= z$, omnes illæ Aſymtotæ curvilineæ continebuntur in hac æquatione $zz = \frac{C}{t^k}$, denotante k numerum integrum minorem quam $n - 1$. Harum autem Curvarum rami in infinitum excurrentes, ſeu facto $t = \infty$, ita ſe habebunt. Si $k = 1$, ſeu $zz = \frac{C}{t}$, quia t negativum fieri nequit, Curva duos habebit ramos EX & FX in regionibus P & R in infinitum excurrentes, quod idem eveniet ſi fuerit k numerus quicunque impar. At, ſi ſit k numerus par, ut 2, ſeu $zz = \frac{C}{tt}$, primum diſpiciendum eſt utrum C ſit quantitas negativa an affirmativa. Priori caſu æquatio realis eſſe nequit, ideoque Curva hinc nullum habebit ramum in infinitum extenſum. Poſteriori caſu Curva quatuor habebit ramos in infinitum excurrentes & cum Aſymtota XY concurrentes, ſcilicet EX, FX, GY, & HY in omnibus quatuor regionibus P, Q, R, & S diſperſos. TAB. X Fig. 39. TAB. XI Fig. 40.

210. Ponamus ſupremum membrum æquationis P habere tres Factores æquales, atque æquatione ad Coordinatas t & u reducta, ut ſit u iſte Factor triplex ipſius P, erit.

$$P = \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha t^{n-3} u^3 + \alpha t^{n-4} u^4 + \&c.$$
$$Q = 6t^{n-1} + 6t^{n-2} u + 6t^{n-3} u^2 + 6t^{n-4} u^3 + 6t^{n-5} u^4 + \&c.$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \gamma t^{n-5} u^3 + \gamma t^{n-6} u^4 + \&c.$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \delta t^{n-6} u^3 + \delta t^{n-7} u^4 + \&c.$$
&c.

 Hinc,

 Hinc, pro diversis constitutionibus membrorum Q & R, sequentes oriuntur æquationes.

I.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-1} = 0$$

II.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-2} u + \gamma t^{n-2} = 0$$

III.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-3} u^2 + \gamma t^{n-2} = 0$$

IV.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-3} u^2 + \gamma t^{n-3} u + \delta t^{n-3} = 0.$$

211. Prima æquatio abit in $\alpha u^3 + \beta t^2 = 0$, ideoque hæc
TAB. XI. *Fig.* 41. Asymtota est Linea tertii ordinis, cujus talis erit figura, si Abscissæ t super Axe XY a puncto A sumantur. Duos scilicet habebit ramos E & F in regionibus P & Q in infinitum excurrentes.

Secunda æquatio ita se habet $\alpha u^3 + \beta t u + \gamma t = 0$. Ex qua u, posito $t = \infty$, duplicem valorem habere potest, vel finitum vel infinitum, ideoque in has duas æquationes resolvitur $\beta u + \gamma = 0$ & $\alpha u u + \beta t = 0$, posterior est pro Parabola, uti ante vidimus, ac propterea Curva habebit duos ramos in infinitum extensos ad Parabolam appropinquantes. Prior vero æquatio præbeat $u - c = 0$, quæ est pro Linea recta Asymtota, cujus indoles perspicietur si, præterquam in $\beta u + \gamma = u - c$, ubique loco u scribatur c; eritque ergo, $t^{n-2}(u-c) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4}(\alpha c^4 + \beta c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \varepsilon) +$ &c. $= 0$; unde, uti supra, sequitur fore vel $(u-c) + \frac{A}{t} = 0$, vel $(u-c) + \frac{A}{tt} = 0$, &c.. Ultima vero æquatio, quæ oriri potest, est $(u-c) + \frac{A}{t^{n-2}} = 0$. Hoc ergo casu Curva duplicem habebit Asym-

totam,

totam, alteram rectam indolis hic declaratæ, alteram vero Parabolam conjunctim. CAP. VIII.

212. Tertia æquatio $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma t = 0$, posito $t = \infty$, subsistere nequit, nisi sit $u = \infty$; ideoque terminus βu^2 præ αu^3 evanescit, proditque ista æquatio tertii ordinis $\alpha u + \gamma t = 0$, pro Asymtota, cujus hæc est figura, ut in regionibus oppositis P & S duos habeat ramos AE & AF in infinitum excurrentes. TAB. XI. *Fig.* 42.

Quarta æquatio autem $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = 0$, vel unam vel tres Asymtotas rectas inter se parallelas exhibet, nisi duæ vel omnes inter se sint æquales, ad quarum indolem indagandam sit primum $u = c$, radix æquationis una aliam sui similem non habens, sitque $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = (u - c) \times (fu^2 + gu + h)$. Ponatur ubique $u = c$, præterquam in hoc Factore $u - c$, ac prodibit hujusmodi æquatio $t^{n-3}(u-c) + At^{n-4} + Bt^{n-5} + Ct^{n-6} + \&c. = 0$; unde Asymtota orietur formæ $u - c = \frac{K}{t^k}$, existente k numero minore quam $n - 2$.

213. Si æquationis $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = 0$, duæ radices fuerint æquales, ita ut ea expressio sit $= (u - c)^2 \times (fu + g)$; atque, statuendo $u = c$, nisi in quopiam membro fuerit Factor $u - c$, ad hujusmodi æquationem pervenietur $(u - c)^2 + \frac{A(u - c)}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0$; ubi erit q minor quam $n - 2$, & p minor quam q, quem casum ante evolvimus. Superest ergo casus, quo æquatio $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = 0$, tres habet radices reales, puta $(u - c)^3$, atque hujusmodi obtinebitur æquatio $(u - c)^3 t^{n-3} + Pt^{n-4} + Qt^{n-5} + Rt^{n-6} + St^{n-7} + \&c. = 0$. Quod si P non fuerit divisibile per $u - c$, ponatur $u = c$, fietque

LIB. II. $(u-c)^3+\frac{A}{t}=0$. Sin autem P diviſorem habeat $u-c$ ſemel, ponatur ubique, præterquam in hoc Factore, $u=c$, atque orietur æquatio hujus formæ $(u-c)^3+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^q}=0$, exiſtente q numero minore quam $n-2$; eſt vero $\frac{B}{t^q}$ terminus ſecundum proxime ſequens, qui non evaneſcit facto $u-c$. Sin P adeo per $(u-c)^2$ fuerit diviſibilis, Q vero non habeat Factorem $u-c$, orietur æquatio hujus formæ $(u-c)^3+\frac{A(u-c)^2}{t}+\frac{B}{tt}=0$. Quod ſi autem ſecundus adeo per $(u-c)^3$ fuerit diviſibilis, tum ordine procedendum eſt, donec ad terminum perveniatur non diviſibilem per $(u-c)^3$, qui ſi fuerit diviſibilis per $(u-c)$, ulterius eſt progrediendum, donec ad terminum non diviſibilem per $u-c$, perveniatur. Sin autem ille terminus per $(u-c)^2$ diviſibilis fuerit, procedatur ulterius donec perveniatur ad terminum vel non diviſibilem per $u-c$ vel diviſibilem. Priori caſu æquatio terminetur, poſteriori ulterius pergatur donec ad terminum non diviſibilem per $(u-c)$ perveniatur. Sic itaque obtinebitur ſemper æquatio in hac forma generali contenta $(u-c)^3+\frac{A(u-c)^2}{t^p}+\frac{B(u-c)}{t^q}+\frac{C}{t^r}=0$, ubi erit r minor quam $n-2$; q minor quam r, & p minor quam q.

214. In hac æquatione vel tres continentur æquationes formæ $(u-c)=\frac{K}{t^k}$; vel una hujuſmodi & una $(u-c)^2=\frac{K}{t^k}$; vel unica tantum formæ $(u-c)^3=\frac{K}{t^k}$: quod poſtremum evenit ſi fuerit & $3p$ major quam r & $3q$ major quam $2r$.

2r. Tum vero etiam fieri poteſt ut duæ æquationes fiant imaginariæ, quæ ergo nullam Aſymtotam indicabunt. Ceterum formas harum Aſymtotarum jam explicavimus præter ultimam æquatione $(u-c)^3 = \frac{K}{t^k}$ contentam. Præbet autem iſta æquatio, ſi k ſit numerus impar, formam Figurâ trigeſimâ ſextâ deſignatam, cum duobus ramis EX & FY in regionibus oppoſitis P & S in infinitum excurrentibus. Sin autem k ſit numerus par, orietur forma Figura trigeſima ſeptima repræſentata in qua ſunt duo rami EX & FY ad eandem Aſymtotæ rectæ XY partem, ſeu in regionibus P & Q excurrentes.

CAP. VIII.

TAB. X. *Fig.* 36.

TAB. X *Fig.* 37.

215. Quoniam ex his facile perſpicitur, quemadmodum Aſymtotarum forma, ſi quatuor pluresve Factores ſimplices in membro æquationis ſupremo fuerint æquales, inveſtigari debeat, ulterius hic non progredior; verum hoc Caput applicatione regularum datarum ad unum exemplum finiam.

E X E M P L U M.

Sit igitur propoſita Linea curva hac æquatione expreſſa $y^3xx \times (y-x) - xy(yy+xx) + 1 = 0$, *cujus ſupremum membrum* $y^3xx(y-x)$ *unum Factorem habet ſolitarium*, $y-x$, *duos æquales* xx, *& inſuper tres æquales* y^3.

Conſideremus primum Factorem ſimplicem $y-x$; ex quo, poſito $y=x$, fiet $y-x-\frac{2}{x}=0$; &, ob $x=\infty$, erit $y-x=0$, quæ eſt æquatio pro Aſymtota rectilinea BAC cum Axe XY in initio Abſciſſarum faciens angulum ſemirectum BAY. Ad hanc Lineam transferatur tanquam ad Axem æquatio, quod fiet ponendo $y=\frac{u+t}{\sqrt{2}}$ & $x=\frac{t-u}{\sqrt{2}}$; quo facto orietur hæc æquatio $\frac{(u+t)(tt-uu)^2u}{4}+\frac{(tt-uu)(tt+uu)}{2}+1=0$: unde, per 4 multiplicando, fiet

TAB. XI. *Fig.* 43.

0 =

$$\begin{array}{l} 0 = t^5u + t^4uu - 2t^3u^3 - 2ttu^4 + tu^5 + u^6 \\ \quad\;\; - 2t^4 \qquad\qquad\qquad\quad + 2u^4 \\ \quad\;\; + 4 \end{array}$$

ex hac æquatione, facto $t = \infty$, invenitur $u = 0$; ideoque reliqui termini, præter hos duos $t^5u - 2t^4$, evanefcunt; unde pro Afymtota curvilinea erit $u = \frac{2}{t}$. Ob hunc ergo Factorem Curva quæfita duos habebit ramos bB, cC in infinitum excurrentes.

216. Sumantur nunc Factores æquales gemini x^2; eritque, ob $xx = \frac{xy(yy+xx)-1}{y^3(y-x)}$. Axe ergo fumto recta AD ad priorem XY normali, fiet $y = t$ & $x = u$, pro quo ifta æquatio refultat

$$\begin{array}{l} 0 = t^4u^2 - t^3u^3 \\ \quad - t^3u - tu^3 \\ \quad + 1 \end{array}$$

quæ, facto t infinito, abit in $t^4u^2 - t^3u + 1 = 0$, unde duæ nafcuntur æquationes $u = \frac{1}{t}$ & $u = \frac{1}{t^3}$. Quare hic Factor quatuor præbet ramos in infinitum excurrentes; primo nempe duos dD, eE ex æquatione $u = \frac{1}{t}$; & duos ad eafdem partes fitos δD & εE ex æquatione $u = \frac{1}{t^3}$.

217. Tres Factores æquales y^3 referuntur ad ipfum Axem XY, fietque $t = x$ & $y = u$, unde nafcitur æquatio hæc,

$$0 = -t^3u^3 + ttu^4 - t^3u - tu^3 + 1:$$

quæ, pofito t infinito, dat $t^3u^3 + t^3u = 0$, feu $u(uu+1) = 0$; unde, ob $uu + 1 = 0$ æquationem impoffibilem, unica obtinetur Afymtota recta $u = 0$, conveniens cum ipfo Axe XY, cujus indoles exprimetur hac æquatione $t^3u = 1$ feu $u = \frac{1}{t^3}$; ac propterea ifte Factor triplex duos tantum præbet ramos yY & xX in infinitum excurrentes. Omnino ergo

Curva

Curva quæsita octo ramos in infinitum extensos habebit, qui quomodo in spatio finito inter se conjungantur hujus non est loci explicare. CAP. VIII.

218. Ex hoc ergo & præcedente Capite ramorum in infinitum extensorum varietas luculenter perspicitur. Primum enim hi rami Curvarum vel ad Lineam quampiam rectam tanquam Asymtotam convergunt, uti fit in Hyperbola, vel Asymtotam rectam non habent, uti Parabola. Priori casu rami Curvarum vocantur *hyperbolici*, posteriori *parabolici*. Utriusque classis innumerabiles dantur species; ramorum enim hyperbolicorum species his exprimuntur æquationibus, inter Coordinatas t & u, quarum illa t statuitur infinita.

$$u = \frac{A}{t};\ u = \frac{A}{tt};\ u = \frac{A}{t^3};\ u = \frac{A}{t^4},\ \&c.$$
$$u^2 = \frac{A}{t};\ u^2 = \frac{A}{tt};\ u^2 = \frac{A}{t^3};\ u^2 = \frac{A}{t^4},\ \&c.$$
$$u^3 = \frac{A}{t};\ u^3 = \frac{A}{tt};\ u^3 = \frac{A}{t^3};\ u^3 = \frac{A}{t^4},\ \&c.$$
$$\&c.$$

Ramorum vero parabolicorum species indicantur sequentibus æquationibus.

$$u^2 = At;\ u^3 = At;\ u^4 = At;\ u^5 = At,\ \&c.$$
$$u^3 = At^2;\ u^4 = At^2;\ u^5 = At^2;\ u^6 = At^2,\ \&c.$$
$$u^4 = At^3;\ u^5 = At^3;\ u^6 = At^3;\ u^7 = At^3,\ \&c.$$
$$\&c.$$

Quælibet autem æquatio harum expositarum, ad minimum, duos exhibet ramos in infinitum excurrentes, si exponentium ipsarum t & u non uterque fuerit numerus par; sin autem uterque exponens fuerit numerus par, tum vel nullum ramum infinitum prabet, vel quatuor: illud scilicet evenit, si æquatio sit impossibilis, hoc vero si sit realis.

LIB. II.

CAPUT IX.

De Linearum tertii ordinis ſubdiviſione in ſpecies.

219. NAtura atque numerus ramorum in infinitum extenſorum merito eſſentiale diſcrimen in Lineis curvis conſtituere cenſetur, atque ex hoc fonte commodiſſime deſumitur ratio ſubdiviſionis Linearum cujuſque ordinis in ſuas ſpecies diverſas. Hinc enim quoque oritur eadem Linearum ſecundi ordinis diviſio in ſuas ſpecies, quam ipſa rei natura ſupra ſuppeditaverat.

Sit enim propoſita æquatio generalis pro Lineis ſecundi ordinis

$$\alpha yy + \beta yx + \gamma xx + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0,$$

cujus ſupremum membrum $\alpha yy + \beta yx + \gamma xx$, potiſſimum ſpectetur, utrum habeat Factores ſimplices reales an ſecus. Quod ſi enim careat Factoribus, naſcitur prima ſpecies, *Ellipſis* dicta, ſin autem Factores ſint reales, videndum eſt utrum ſint inæquales, an æquales; illo caſu oritur *Hyperbola*, hoc vero *Parabola*.

220. Caſu ergo, quo membri ſupremi Factores ſunt reales & inæquales, Curva duas habebit Aſymtotas rectas; ad quarum naturam inveſtigandam ſit $\alpha yy + \beta yx + \gamma xx = (ay - bx)(cy - dx)$, ita ut ſit

$$(ay - bx)(cy - dx) + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0.$$

Conſideretur primum Factor $ay - bx$, qui in infinito dat $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, fiet itaque

$$ay - bx + \frac{\delta b + \varepsilon a}{bc - ad} + \frac{\zeta}{cy - dx} = 0,$$

unde

unde æquatio $ay - bx + \frac{\delta b + \varepsilon a}{bc - ad} = 0$, definit positionem unius Asymtotæ rectæ; similique modo æquatio hæc $cy - dx + \frac{\delta d + \varepsilon c}{ad - bc} = 0$, ostendet Asymtotam alteram. CAP. IX.

221. Ad naturam cujusque Asymtotæ scrutandam, æquationem ad alium Axem transferamus ponendo $y = \frac{au + bt}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & $x = \frac{at - bu}{\sqrt{(aa+bb)}}$, sitque $\sqrt{(aa+bb)} = g$, erit $u((ac + bd)u + (bc - ad)t) + \frac{(\delta a - \varepsilon b)u + (\delta b + \varepsilon a)t}{g} + \zeta = 0$, ideoque

$$g(bc - ad)tu + g(ac + bd)uu +$$
$$(\delta b + \varepsilon a)t + (\delta a - \varepsilon b)u + \zeta g = 0.$$

Hinc, posito in reliquis membris $u = -\frac{\delta b - \varepsilon a}{g(bc - ad)}$, erit $(g(bc - ad)u + \delta b + \varepsilon a)t + \frac{(ac + bd)(\delta b + \varepsilon a)^2}{g(bc - ad)^2} \frac{(\delta a - \varepsilon b)(\delta b + \varepsilon a)}{g(bc - ad)} + \zeta g = 0$, seu $g(bc - ad)u + \delta b + \varepsilon a + \frac{g(\delta b + \varepsilon c)(\delta b + \varepsilon a)}{(bc - ad)^2 t} + \frac{\zeta g}{t} = 0$: erit ergo Asymtota hyperbolica generis $u = \frac{A}{t}$. Simili vero modo Asymtota altera ex Factore $cy - dx$ oriunda definietur, unde Curva habebit duo ramorum in infinitum extensorum paria, utrumque æquatione $u = \frac{A}{t}$ expressum.

222. Sint jam ambo Factores æquales, seu $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx = (ay - bx)^2$; atque, facta eadem ad alium Axem translatione, qua fit $y = \frac{ay + bt}{g}$, & $x = \frac{at - bu}{g}$, erit $gguu + \frac{(\delta a - \varepsilon b)u}{g} + \frac{(\delta b + \varepsilon a)t}{g} + \zeta = 0$; &, facto t infinito, erit $uu + \frac{(\delta b + \varepsilon a)t}{g^3} = 0$, quæ æquatio ostendit

 duos

LIB. II. duos ramos parabolicos speciei $uu = At$, quippe Curva ipsa erit Parabola, ipsaque sua Asymtota. Sin autem esset $\delta b + \varepsilon a = 0$, tum æquatio foret $ggzuu + \frac{\delta gu}{a} + \zeta = 0$, pro duabus rectis inter se parallelis, qui est casus, quo æquatio secundi ordinis tota in duos Factores simplices est resolubilis.

Sic igitur species Linearum secundi ordinis invenissemus, etiam si nondum erutæ fuissent.

223. Eodem igitur modo aggrediamur Lineas tertii ordinis, quarum æquatio generalis est

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma yxx + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0.$$

Supremum igitur membrum $\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3$, quia est imparium dimensionum, vel unum habet Factorem simplicem realem, vel omnes tres Factores simplices erunt reales. Sequentes igitur casus sunt evolvendi.

I.

Si unicus extet Factor simplex realis.

II.

Si omnes tres sint reales, & inter se inæquales.

III.

Si duo Factores fuerint æquales.

IV.

Si omnes tres Factores fuerint æquales.

Quoniam vero in quovis casu ad unicum Factorem calculum accommodasse sufficit; sit iste Factor, sive solus adsit sive cum aliis sui æqualibus inæqualibusve, $ay - bx$; atque ad hunc positio Axis ita immutetur, ut hactenus fecimus; quo facto, oriatur hæc æquatio, qua vice superioris utamur cum æque late pateat

$$\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3 + \delta tt + \varepsilon tu + \zeta uu + \eta t + \theta u + \iota = 0,$$

ubi membrum supremum $\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3$, unum certe habet Factorem u.

CASUS I.

Casus 1.

224. Habeat ergo membrum ſupremum unicum Factorem realem u, quod evenit ſi $\beta\beta$ ſit minor quam $4\alpha\gamma$: atque, poſito t infinito, erit $\alpha u + \delta = 0$, quæ eſt æquatio pro Aſymtota recta. Præbeat hæc æquatio valorem $u = c$; eritque,

$$\alpha tt(u - c) + t(\beta cc + \varepsilon c + \eta) + \gamma c^3 + \zeta cc + \theta c + \iota = 0,$$

quæ eſt æquatio pro natura Aſymtotæ. Hinc, prout $\beta cc + \varepsilon c + \eta$ vel non fuerit $= 0$, vel ſit $= 0$, duplex Aſymtotæ indoles prodit; nempe vel $u - c = \frac{A}{t}$, vel $u - c = \frac{A}{tt}$; unde duæ primæ Linearum tertii ordinis ſpecies formantur, quæ ita ſe habebunt.

1.

Prima Species unicam habet Aſymtotam rectam ſpeciei $u = \frac{A}{t}$.

2.

Secunda Species unicam habet Aſymtotam rectam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

Casus 2.

225. Sint membri ſupremi tres Factores ſimplices reales & inter ſe inæquales; quod evenit ſi in æquatione

$$\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3 + \delta tt + \varepsilon tu + \zeta uu + \eta t + \theta u + \iota = 0,$$

fuerit $\beta\beta$ major quam $4\alpha\gamma$. Hoc igitur caſu de unoquoque Factore eadem ſunt tenenda, quæ modo de unico Factore ſunt expoſita. Unuſquiſque ſcilicet ſuppeditat binos ramos hyperberbolicos vel ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, vel ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, unde

 in

LIB. II. in hoc caſu quatuor diverſæ ſpecies Linearum tertii ordinis continentur, tribus Aſymtotis rectis ad ſe invicem utcunque inclinatis præditæ, quæ ſpecies ſunt.

3.

TERTIA Species tres habet Aſymtotas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$.

4.

QUARTA Species duas habet Aſymtotas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$ & unam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

Quinta Species unam habet Aſymtotam ſpeciei $u = \frac{A}{t}$ *& duas ſpeciei* $u = \frac{A}{tt}$. *

Sexta Species tres habet Aſymtotas ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

226. Videamus autem an hæ omnes ſpecies ſint poſſibiles; quem in finem ſumamus hanc æquationem latiſſime patentem,

$$y(\alpha y - \beta x)(\gamma y - \delta x) + \varepsilon xy + \zeta yy + \eta x + \theta y + \iota = 0,$$

cujus ſupremum membrum tres habet Factores reales; quanquam enim terminus xx eſt omiſſus, tamen æquatio non minus late patet. Ex præcedentibus autem intelligitur, Factorem y præbere Aſymtotam formæ $u = \frac{A}{t}$, ſi non fuerit $\eta = 0$. Quare videamus cujuſmodi Aſymtotam præbeat Factor $\alpha y - \beta x$. Ad hoc ponamus $y = \alpha u + \beta t$, & $x = \alpha t - \beta u$; ſitque, brevitatis ergo, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, quod ſemper aſſumere licet; atque æquatio transformabitur in hanc formam.

$$\left.\begin{array}{lll} \beta(\beta\gamma - \alpha\delta)ttu & + (2\alpha\beta\gamma - (\alpha\alpha - \beta\beta)\delta)\,tuu & + \alpha(\alpha\gamma + \beta\delta)u^3 \\ + \beta(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)tt & + (2\alpha\beta\zeta + (\alpha\alpha - \beta\beta)\varepsilon)\,tu & + \alpha(\alpha\zeta - \beta\varepsilon)u^2 \\ & + (\alpha\eta + \beta\theta)t & + (\alpha\theta - \beta\eta)u \\ & & + \iota \end{array}\right\} = 0$$

Hic Factor $\alpha y - \beta x$ tranſiit in u; ex quo, poſito t infinito, primum

* Vide infra pag. 119.

primum fit $u = \frac{\alpha\varepsilon + \beta\zeta}{\alpha\delta - \beta\gamma} = c$, qui valor si loco u in secundo membro continente t substituatur, ostendet ex hoc Factore u seu $\alpha y - \beta x$ Asymtotam oriri formæ $u = \frac{A}{t}$ nisi fuerit Cap. IX.

$$\frac{\alpha\eta + \beta\theta}{\beta} + \frac{(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = 0.$$

Simili modo Factor $\gamma y - \delta x$ Asymtotam præbebit formæ $u = \frac{A}{t}$ nisi fuerit

$$\frac{\gamma\eta + \delta\theta}{\delta} + \frac{(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = 0.$$

227. Hinc patet fieri utique posse ut neque η neque utraque formula modo inventa evanescat, ex quo species tertia utique erit possibilis. Quod ad speciem quartam attinet, ponatur $\eta = 0$, quo una Asymtota formæ $u = \frac{A}{tt}$ prodeat; tum autem ambæ reliquæ expressiones in unam coalescunt, ideoque binæ reliquæ Asymtotæ erunt formæ $u = \frac{A}{t}$, nisi fuerit $\theta + \frac{(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = 0$; unde & species quarta est possibilis. At, si præter $\eta = 0$, una ex binis reliquis expressionibus reddatur $= 0$, simul altera evanescit; quam ob rem fieri non potest, ut duæ Asymtotæ fiant formæ $u = \frac{A}{tt}$, quin simul tertia eandem formam induat; ex quo species quinta est impossibilis. Sexta autem ob hoc ipsum erit possibilis, quia oritur, si $\eta = 0$, & $\theta = \frac{-(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}$. Hi ergo duo casus quinque tantum præbuerunt species Linearum tertii ordinis, quod ea, quam quintam posuimus, prætermitti debet, &

5.

QUINTA Species tres habet Asymtotas speciei $u = \frac{A}{tt}$.

Casus

LIB. II.

CASUS 3.

228. Habeat membrum ſupremum duos Factores u æquales; quod evenit, ſi in æquatione caſus præcedentis primus terminus αttu evaneſcat. Æquatio ergo generalis ad hunc caſum pertinens erit hujuſmodi,

$$\alpha tuu - \beta u^3 + \gamma tt + \delta tu + \varepsilon uu + \zeta t + \eta u + \theta = 0,$$

habet ergo membrum ſupremum duos Factores u æquales, ac tertium $\alpha u - \beta u$ reliquis inæqualem. Iſte tertius Factor producet Aſymtotam vel formæ $u = \frac{A}{t}$, vel formæ $u = \frac{A}{tt}$, prout fuerit hæc expreſſio

$$(\alpha\delta + 2\beta\gamma)(\alpha^2\varepsilon + \alpha\beta\delta + \beta\beta\gamma) - \alpha^3(\alpha\eta + \beta\zeta)$$

vel non $= 0$, vel $= 0$.

229. Quod ad duos Factores æquales attinet, primum caſus occurrit, ſi γ non fuerit $= 0$; tum enim, facto $t = \infty$, fiet $\alpha uu + \gamma t = 0$, quæ eſt æquatio pro Aſymtota parabolica ſpeciei $uu = At$. Hinc iſtæ duæ naſcentur ſpecies novæ Linearum tertii ordinis, nempe.

6.

SEXTA Species habet unam Aſymtotam ſpeciei $u = \frac{A}{t}$ & unam Aſymtotam ſpeciei $uu = At$.

7.

SEPTIMA Species habet unam Aſymtotam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$ & unam parabolicam ſpeciei $uu = At$.

230. Sit jam $\gamma = 0$; atque Factor tertius $\alpha t - \beta u$ dabit Aſymtotam formæ $u = \frac{A}{tt}$, ſi fuerit

$$\delta(\alpha\varepsilon + \beta\delta) = \alpha(\alpha\eta + \beta\zeta)$$

ſin autem hæc æqualitas non habeat locum, Aſymtota erit formæ $u = \frac{A}{t}$. Habebimus ergo hanc æquationem

+ αtuu

$$\left.\begin{array}{ll} +\alpha tuu & -\beta u^3 \\ +\delta tu & +\varepsilon uu \\ +\zeta t & +\eta u \\ +\theta & \end{array}\right\} = 0$$

Hic, facto $t = \infty$, fiet $\alpha uu + \delta u + \zeta = 0$.

Sit primum $\delta\delta$ minor quam $4\alpha\zeta$, atque hinc nulla orietur Asymtota; quare ex hoc casu duæ oriuntur species.

8.

OCTAVA Species habet unicam Asymtotam speciei

$$u = \frac{A}{t}.$$

9.

NONA Species habet unicam Asymtotam speciei

$$u = \frac{A}{tt}.$$

231. Sint æquationis $\alpha uu + \delta u + \zeta = 0$, ambæ radices reales & inæquales, nempe $\delta\delta$ major quam $4\alpha\zeta$; atque hinc duæ prodibunt Asymtotæ rectæ inter se parallelæ, utraque formæ $u = \frac{A}{t}$, qui casus denuo duas suppeditat Species.

10.

DECIMA Species habet unam Asymtotam speciei $u = \frac{A}{t}$ & duas inter se parallelas speciei $u = \frac{A}{t}$.

11.

UNDECIMA Species habet unam Asymtotam speciei $u = \frac{A}{tt}$ & duas inter se parallelas speciei $u = \frac{A}{t}$.

232. Sint æquationis $\alpha uu + \delta u + \zeta = 0$, ambæ radices inter se æquales, seu $\delta\delta = 4\alpha\zeta$, seu $\alpha uu + \delta u + \zeta = \alpha(u - c)^2$, fietque $\alpha t(u - c)^2 = \beta c^3 - \varepsilon cc - \eta c - \theta$, unde oritur Asymtota recta una speciei $uu = \frac{A}{t}$. Hinc ergo duæ nascuntur Species novæ.

12.

DUODECIMA Species habet unam Asymtotam speciei

 $u =$

LIB. II. $u = \frac{A}{t}$ & unam speciei $uu = \frac{A}{t}$.

13.

DECIMATERTIA Species habet unam Asymtotam speciei $u = \frac{A}{tt}$ & unam speciei $uu = \frac{A}{t}$.

CASUS IV.

233. Quod si membri supremi omnes tres Factores fuerint æquales, æquatio habebit hujusmodi formam,

$$\alpha u^3 + \beta tt + \gamma tu + \delta uu + \varepsilon t + \zeta u + \eta = 0,$$

Hic primum spectandus est terminus βtt, qui si non desit, Curva habebit Asymtotam parabolicam speciei $u^3 = Att$, sicque una oritur Species.

14.

DECIMAQUARTA Species habet unicam Asymtotam parabolicam speciei $u^3 = Att$.

234. Desit jam terminus βtt, eritque

$$\alpha u^3 + \gamma tu + \delta uu + \varepsilon t + \zeta u + \eta = 0;$$

unde, posito t infinito, fiet $\alpha u^3 + \gamma tu + \varepsilon t = 0$, nisi sint γ & $\varepsilon = 0$. Non igitur sit $\gamma = 0$, atque in hac æquatione duæ continentur æquationes $\alpha uu + \gamma t = 0$, & $\gamma u + \varepsilon = 0$; prior est pro Asymtota parabolica speciei $uu = At$; posterior vero, si ponatur $\frac{-\varepsilon}{\gamma} = c$, dabit æquationem hanc

$$\gamma t(u - c) + \alpha c^3 + \delta cc + \zeta c + \eta = 0,$$

eritque ergo pro Asymtota hyperbolica speciei $u = \frac{A}{t}$, unde.

15.

DECIMAQUINTA Species unam habet Asymtotam parabolicam speciei $uu = At$, & unam rectam speciei $u = \frac{A}{t}$

$\frac{A}{t}$, atque Axis parabolæ parallelus eſt alteri Aſymtotæ rectæ. Cap. IX.

235. Sit etiam $\gamma = 0$, ut ſit hæc æquatio

$$\alpha u^3 + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0,$$

ubi ϵ evaneſcere non poteſt, niſi ſimul Linea ceſſet eſſe Curva. Facto autem t infinito, neceſſario u debet eſſe infinita, unde fit $\alpha u^3 + \epsilon t = 0$, quæ præbet ſpeciem ultimam.

16.

Decimasexta Species unam habet Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = At$.

236. Omnes ergo Lineas tertii ordinis reduximus ad *ſedeciem Species*, in quibus propterea omnes illæ *Species ſeptuaginta duæ*, in quas Newtonus Lineas tertii ordinis diviſit, continentur. Quod vero inter hanc noſtram diviſionem ac *Newtonianam* tantum intercedat diſcrimen mirum non eſt; hic enim tantum ex ramorum in infinitum excurrentium indole Specierum diverſitatem deſumſimus, cum Newtonus quoque ad ſtatum Curvarum in ſpatio finito ſpectaſſet, atque ex hujus varietate diverſas Species conſtituiſſet. Quanquam autem hæc diviſionis ratio arbitraria videtur, tamen Newtonus ſuam tandem rationem ſequens multo plures Species producere potuiſſet, cum equidem mea methodo utens neque plures neque pauciores Species eruere queam.

237. Quo igitur natura & complexus cujuſque Speciei melius perſpiciatur, æquationem generalem pro qualibet Specie exhibebo, idque in ſimpliciſſima forma, quæ ſalva univerſitate locum habere poteſt. Pro unaquaque vero ſimul Species *Newtonianas* eo pertinentes recenſebo.

Species Prima.

$$y(xx - 2mxy + nnyy) + ayy + bx + cy + d = 0,$$

exiſtente mm majore quam nn & niſi ſit erit $b = 0$.

Huc pertinent Newtoni ſpecies, 33, 34, 35, 36, 37, 38.

LIB. II.

SPECIES SECUNDA.

$$y(xx - 2mxy + nnyy) + ayy + cy + d = 0:$$
existente mm minore quam nn.

Huc pertinent NEWTONI species, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

SPECIES TERTIA.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy + bx + cy + d = 0,$$
ubi nec $b = 0$, nec $mb + c + \frac{aa}{(m-n)^2} = 0$, nec $nb + c + \frac{aa}{(m-n)^2} = 0$, neque $m = n$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; item 24, 25, 26, 27, si $a = 0$.

SPECIES QUARTA.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy + cy + d = 0;$$
ubi nec $c + \frac{aa}{(m-n)^2} = 0$, nec $m = n$.

Huc pertinent NEWTONI Species 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21; item, si $a = 0$, hæ 28, 29, 30, 31.

SPECIES QUINTA.

$$y(x - my)(x - ny) + ayy - \frac{aay}{(m-n)^2} + d = 0,$$
non existente $m = n$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 22, 23, & 32.

SPECIES SEXTA.

$$yy(x - my) + axx + bx + cy + d = 0;$$
si neque $a = 0$, neque $2m^3aa - mb - c = 0$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52.

SPECIES

SPECIES SEPTIMA.

$$yy(x - my) + axx + bx + m(2m^2a^2 - b)y + d = 0;$$
non existente $a = 0$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 53, 54, 55, 56.

SPECIES OCTAVA.

$$yy(x - my) + bbx + cy + d = 0;$$
non existente $c = -mbb$ nec $b = 0$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 61, & 62.

SPECIES NONA.

$$yy(x - my) + bbx - mbby + d = 0;$$
non existente $b = 0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 63.

SPECIES DECIMA.

$$yy(x - my) - bbx + cy + d = 0;$$
non existente $c = mbb$, nec $b = 0$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 57, 58, 59.

SPECIES UNDECIMA.

$$yy(x - my) - bbx + mbby + d = 0;$$
non existente $b = 0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 60.

SPECIES DUODECIMA.

$$yy(x - my) + cy + d = 0;$$
non existente $c = 0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 64.

Lib. II.

Species Tertia-decima.

$$yy(x - my) + d = 0.$$

Huc pertinet Newtoni Species, *65*.

Species Quarta-decima.

$$y^3 + axx + bxy + cy + d = 0:$$

non exiſtente $a = 0$.

Huc pertinet Newtoni Species, *67, 68, 69, 70, 71*.

Species Quinta-decima.

$$y^3 + bxy + cx + d = 0;$$

non exiſtente $b = 0$.

Huc pertinet Newtoni Species, *66*.

Species Sexta-decima.

$$y^3 + ay + bx = 0;$$

non exiſtente $b = 0$.

Huc pertinet Newtoni Species, *72*.

238. Species autem hæ plerumque tam late patent, ut ſub unaquaque varietates ſatis notabiles contineantur; ſi quidem ad formam, quam Curvæ habent in ſpatio finito, reſpiciamus. Hancque ob cauſam Newtonus numerum Specierum multiplicavit, ut eas Curvas, quæ in ſpatio finito notabiliter diſcrepant, a ſe invicem ſecerneret. Expediet ergo has, quas *Species* nominavimus, *Genera* appellare, atque varietates, quæ ſub unoquoque deprehenduntur, ad *Species* referre. Imprimis autem hoc erit tenendum, ſi quis Lineas quarti altioriſve ordinis ſimili modo ſubdividere voluerit; ibi enim multo major varietas in quavis Specie ſic inventa locum habebit.

CAPUT

CAPUT X.

De præcipuis Linearum tertii ordinis proprietatibus.

239. Quemadmodum ſupra Linearum ſecundi ordinis proprietates præcipuas ex æquatione generali deduximus, ita etiam Linearum tertii ordinis præcipuæ proprietates ex æquatione generali cognoſci poterunt: ſimilique modo licebit Linearum quarti altiorisve gradus proprietates ex æquatione concludere. Quam ob rem conſideremus æquationem generaliſſimam pro Lineis tertii ordinis, quæ eſt

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma yxx + \delta x^3 + \epsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

quæ exprimet naturam Lineæ tertii ordinis cujuſvis inter Coordinatas x & y ad quemvis angulum inclinatas, & recta quacunque pro Axe aſſumta.

240. Niſi igitur α ſit $= 0$, unicuique Abſciſſæ x vel una reſpondebit Applicata realis, vel tres. Ponamus dari tres Applicatas reales; atque manifeſtum eſt earum relationem per æquationem definiri poſſe. Poſita itaque $\alpha = 1$, iſtiuſmodi erit æquatio,

$$y^3 + (\beta x + \epsilon)yy + (\gamma xx + \zeta x + \theta)y + \delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = 0:$$

atque ſumma iſtarum trium Applicatarum eidem Abſciſſæ x reſpondentium, erit $= -\beta x - \epsilon$; ſumma trium rectangulorum ex binis Applicatis formatorum erit $= \gamma xx + \zeta x + \theta$; ac denique productum omnium ſeu parallelepipedum ex illis formatum erit $= -\delta x^3 - \eta xx - \iota x - \kappa = 0$. Si duæ Applicatæ eſſent imaginariæ, hæc quidem eadem valerent, at ad Linearum figuram accommodari non poſſent, quia ex ea neque

LIB. II. neque summa neque rectangulum duarum Applicatarum imaginariarum intelligi potest.

TAB. XII. Fig. 44. 241. Sit igitur Linea quæcunque tertii ordinis ad Axem AZ relata, ad quem sub dato angulo applicatæ sint Ordinatæ LMN, lmn Curvam secantes in tribus punctis. Posita ergo Abscissa $AP = x$, Applicata y triplicem habebit valorem PL, PM, & $-PN$: unde erit $PL + PM - PN = -\beta x - \varepsilon$. Quare, si capiatur $PO = z = \frac{PL + PM - PN}{3}$, punctum O ita erit in medio situm, ut sit $LO = MO + NO$. Cum igitur sit $z = -\frac{\beta x - \varepsilon}{3}$, hoc punctum O situm erit in Linea recta OZ, quæ recta propterea omnes Ordinatas lmn ipsi LMN parallelas ita secabit in o, ut sit $lo + mo = no$; quæ proprietas analoga est proprietati Diametrorum, qua Lineæ secundi ordinis sunt præditæ. Quod si ergo duæ Ordinatæ parallelæ & Curvam in tribus punctis secantes ita secentur in punctis O & o, ut binæ Applicatæ ad unam partem jacentes simul sumtæ æquales sint tertiæ ad partem alteram sitæ, recta per hæc puncta O & o ducta omnes reliquas Ordinatas illis parallelas similiter secabit, eritque quasi Diameter Lineæ tertii ordinis.

242. Quoniam in Lineis secundi ordinis omnes Diametri se mutuo in eodem puncto intersecant, videamus quomodo plures hujusmodi Diametri Linearum tertii ordinis inter se sint comparatæ. Concipiamus ergo ad eundem Axem AP sub alio quovis angulo Applicatas; sitque Abscissa $= t$ & Applicata $= u$; erit $y = nu$ & $x = t - mu$, qui valores in æquatione generali

$$y^3 + \beta y^2 x + \gamma yxx + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \varkappa = 0,$$

substituti hanc dabunt æquationem

$+ n^3 u^3$

CAP X

$$\left.\begin{array}{l} +n^3a^3 + \beta n^2u^2t + \gamma nutt + \delta t^3 + \varepsilon n^2u^2 + \zeta nut + \eta tt + \theta nu + \iota u + \varkappa \\ -\beta mn^2u^3 - 2\gamma mnu^2t - 3\delta mutt \quad - \zeta mnuu - 2\eta mut - \iota mu \\ +\gamma m^2nu^3 + 3\delta m^2u^2t \qquad\qquad + \eta m^2uu \\ -\delta m^3u^3 \end{array}\right\} = 0$$

Hinc pro Linea illa recta Diametri vicem sustinente, si ejus Applicata sub eodem angulo ad Abscissam t ducta vocetur $= v$, erit $3v = \dfrac{-\beta n^2t + 2\gamma mnt - 3\delta m^2t - \varepsilon nn + \zeta mn - \eta mm}{n^3 - \beta mn^2 + \gamma m^2n - \delta m^3}$.

243. Sit jam O interfectio harum duarum Diametrorum, unde ad Axem AZ primo prioribus Applicatis parallela ducatur OP, tum vero posterioribus parallela OQ, eritque $AP = x$, $PO = z$, $AQ = t$ & $OQ = v$. Tum vero erit $z = nv$ & $x = t - mv$, ideoque $v = \frac{z}{n}$, & $t = x + \frac{m}{n} z$. Primo itaque habetur $3z = -\beta x - \varepsilon$, porroque $3v = \frac{-\beta x}{n} - \frac{\varepsilon}{n}$ & $t = x - \frac{\beta mx}{3n} - \frac{\varepsilon m}{3n}$. Substituantur hi valores in æquatione ante inventa, & prodibit

TAB. XII. *Fig.* 45.

$$\left.\begin{array}{l} -\beta nnx + \beta\beta mnx - \beta\gamma mmx + \dfrac{\beta\delta m^3x}{n} \\ -\varepsilon nn + \beta\varepsilon mn - \gamma\varepsilon mm + \dfrac{\delta\varepsilon m^3}{n} \\ +\beta nnx - \dfrac{\beta\beta mnx}{3} - \dfrac{\beta\varepsilon mn}{3} + \varepsilon nn \\ -2\gamma mnx + \dfrac{2\beta\gamma mmx}{3} + \dfrac{2\gamma\varepsilon mm}{3} - \zeta mm \\ +3\delta mmx - \dfrac{\beta\delta m^3x}{n} - \dfrac{\delta\varepsilon m^3}{n} + \eta mm \end{array}\right\} = 0$$

seu

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}\beta\beta mnx - \frac{1}{3}\beta\gamma mmx - 2\gamma mnx + 3\delta mmx \\ +\frac{2}{3}\beta\varepsilon mn - \frac{1}{3}\gamma\varepsilon mm - \zeta mn + \eta mm \end{array}\right\} = 0.$$

 244. Pen-

LIB. II. 244. Pendet ergo utique interſectio Diametrorum O ab inclinatione Applicatarum ad Axem, quæ litteris m & n continetur; neque idcirco, (ſi interſectionem Diametrorum *Centrum* vocare lubeat,) Lineæ tertii ordinis omnes Centro gaudent. Interim tamen caſus exhiberi poſſunt, quibus Diametrorum interſectio mutua in idem punctum fixum incidat. Fiet ſcilicet hoc, ſi termini per mn & mm affecti ſeorſim nihilo æquales ponantur, ac valores ipſius x inde orituri æquales ſtatuantur. Fiet autem ex his duabus æqualitatibus $x = \frac{3\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma} = \frac{3\eta - \gamma\varepsilon}{\beta\gamma - 9\delta}$; qui duo valores ut congruant, neceſſe eſt ut ſit

$$6\beta\beta\eta - 2\beta\beta\gamma\varepsilon - 18\gamma\eta + 6\gamma\gamma\varepsilon = 3\beta\gamma\zeta - 2\beta\beta\gamma\varepsilon - 27\delta\zeta + 18\beta\delta\varepsilon,$$

ſeu

$$\beta\gamma\zeta - 2\beta\beta\eta - 9\delta\zeta + 6\gamma\eta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma\gamma\varepsilon = 0,$$

unde fit $\eta = \frac{\beta\gamma\zeta - 9\delta\zeta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma\gamma\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}$. Quoties ergo η hujuſmodi habuerit valorem, toties omnes Diametri ſe mutuo in uno eodemque puncto interſecant; ideoque hæ Lineæ tertii ordinis Centro gaudebunt, quod reperietur ſumendo in Axe.

$$AP = \frac{3\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}, \&$$

$$PO = \frac{-3\beta\zeta + 6\gamma\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}.$$

245. Hæc eadem Centri determinatio, ſi quod datur, locum habet ſi pro primo coëfficiente α non ponatur unitas. Si enim propoſita fuerit æquatio generaliſſima pro Lineis tertii ordinis

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta xy + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

hæ Curvæ Centro erunt præditæ, ſi fuerit

$\eta = \frac{\beta\gamma\zeta - 9\alpha\delta\zeta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma\gamma\varepsilon}{2\beta\beta - 6\alpha\gamma}$. Tum vero Centrum

erit

erit in O, existente $AP = \frac{3\alpha\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta - 6\alpha\gamma}$ & $PO = \frac{6\gamma\varepsilon - 3\beta\zeta}{2\beta\beta - 6\alpha\gamma}$.

Quare, si unica Ordinata Curvam in tribus punctis secans ita dividatur, ut binæ Applicatæ ad unam partem sitæ æquentur tertiæ ad alteram partem jacenti, tum recta per Centrum & hoc divisionis punctum ducta, omnes alias Ordinatas illi parallelas similiter secabit.

246. Si hæc ad æquationes Specierum supra enumeratarum accommodentur, patebit Species primam, secundam, tertiam, quartam & quintam Centro gaudere, si modo sit $a = 0$; hocque casu Centrum in ipso Abscissarum initio esse positum. Species sexta & septima Centro prorsus carent, quia coëfficiens a abesse nequit. Species vero octava, nona, decima, undecima, duodecima & decima-tertia Centrum habent, semper in Abscissarum initio positum. In Speciebus decima-quarta, decima-quinta & decima-sexta Centrum infinite distat, ideoque omnes illæ Lineæ Triametri inter se erunt parallelæ.

247. His de summa trium cujusque Applicatæ valorum notatis, contemplemur eorundem productum, quoniam de rectangulorum aggregato nihil admodum notatu dignum reperitur. Erit ergo ex æquatione generali §.239. $-PM.PL.PN = -\delta x^3 - \eta xx - \iota x - \kappa$: ad quam expressionem explicandam ad hoc attendamus, quod si ponatur $y = 0$, fiat $\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = 0$, cujus propterea æquationis radices dabunt Axis AZ & Curvæ intersectiones. Quæ si sint in punctis B, C, & D erit $\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = \delta(x - AB)(x - AC)(x - AD)$; quapropter erit $PL.PM.PN = \delta.PB.PC.PD$; ideoque, sumta alia quacunque Ordinata lmn priori parallela, erit $PL.PM.PN : PB.PC.PD = pl.pm.pn : pB.pC.pD$; quæ proprietas omnino similis est illi, quam supra pro Lineis secundi ordinis ratione rectangulorum invenimus; atque similis proprietas in Lineas quarti, quinti, & superiorum ordinum competet.

248. Habeat nunc Linea tertii ordinis tres quoque Asymtotas rectas FBf, GDg, HCh. Quoniam ipsa Linea tertii TAB. XII. Fig. 46.

 ordinis

LIB. II. ordinis in has tres Asymtotas abit, si æquatio pro Curva resolubilis fiat in tres Factores simplices formæ $py + qx + r$; pro Asymtotis, tanquam Linea complexa, peculiaris æquatio exhiberi poterit, cujus supremum membrum conveniet cum supremo membro pro Curva. Deinde vero, quia Asymtotarum positio ex secundo æquationis membro determinatur, æquatio pro Asymtotis & æquatio pro Curva secundum quoque membrum commune habebunt. Quare, si pro Curva ad Axem AP relata hæc fuerit æquatio inter Abscissam $AP = x$, & Applicatam $PM = y$,

$$y^3 + (\beta x + \varepsilon)y^2 + (\gamma xx + \zeta x + \theta)y + \delta x^3 + \eta xx + \iota x + \varkappa = 0.$$

Pro Asymtotis ad eundem Axem AP relatis sequens habebitur æqu tio inter Abscissam $AP = x$ & Applicatam $PG = z$

$$z^3 + (\beta x + \varepsilon)z^2 + (\gamma xx + \zeta x + B)z + \delta x^3 + \eta x^2 + Cx + D = 0,$$

in qua coëfficiens ζ, B, C, D ita sunt comparati, ut æquatio in tres Factores simplices resolubilis evadat.

249. Quod si ergo ducatur Applicata quæcunque PN, cum Curvam secans in tribus punctis L, M, N, tum etiam Asymtotas in tribus punctis F, G, H secans, erit ex æquatione pro Curva $PL + PM + PN = -\beta x - \varepsilon$. At ex æquatione pro Asymtotis erit pari modo $PF + PG + PH = -\beta x - \varepsilon$. Hanc ob rem erit $PL + PM + PN = PF + PG + PH$, seu $FL - GM + HN = 0$. Atque, si alia quæcunque Applicata pf ducatur, erit eodem modo $fn - gm + hl = 0$. Si igitur recta quæcunque cum Curvam tum tres Asymtotas secet in tribus punctis, binæ partes Lineæ inter Asymtotas & Curvam contentæ quæ ad eandem regionem vergunt, æquales erunt parti in regionem oppositam vergenti.

250. In Linea igitur tertii ordinis, quæ tres habet Asymtotas rectas, tria crura ad has Asymtotas convergentia non omnia ad easdem Asymtotarum partes possunt esse disposita: sed,

ſed, ſi duo ad eandem partem vergant, tertium neceſſario ad oppoſitas tendet. Hanc ob rem hujuſmodi Linea tertii ordinis, qualem figura repræſentat, eſt impoſſibilis, quoniam recta ſecans Aſymtotas in punctis f, g, h, Curvam vero in l, m, n, præbet partes fn, gm, hl in eandem plagam vergentes, quarum ſumma nihilo æqualis eſſe nequit. Partes enim in eandem plagam vergentes obtinent idem ſignum, puta $+$; quæ vero in contrariam plagam tendunt ſignum $-$: unde patet ſummam trium harum partium evaneſcere non poſſe niſi ſignis diverſis ſint præditæ. CAP. X. TAB. XIII. *Fig.* 47.

251. Hinc jam clare perſpicitur ratio cur in Linea tertii ordinis dari nequeant duæ Aſymtotæ rectæ ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, dum tertia Aſymtota ſit ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, propterea quod illa crura hyperbolica infinities magis ad ſuam Aſymtotam convergant, quam crus hyperbolicum ſpeciei $u = \frac{A}{t}$. Ponamus enim rectam fl in infinitum removeri, fientque intervalla fn, gm, hl infinite parva. At, ſi rami duo nx, my ponantur ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, tertius vero ramus lz ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, tum intervalla fn & gm infinities erunt minora quam intervallum hl, ideoque eſſe nequit $gm = fn + hl$. TAB. XII. *Fig.* 46.

252. In Lineis ergo ſuperiorum ordinum, quæ tot habent Aſymtotas quot dimenſiones, unica Aſymtota ſpeciei $u = \frac{A}{t}$ adeſſe nequit, dum reliquæ ſint ſpecierum ſuperiorum $u = \frac{A}{tt}$, $u = \frac{A}{t^3}$ &c.; ſed, ſi una adſit ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, neceſſario & altera adeſſe debet. Ob eandem rationem, ſi Aſymtota ſpeciei $u = \frac{A}{t}$ nulla adſit, fieri non poteſt ut una tantum ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$ adſit, ſed ad minimum duæ ad-

 eſſe

LIB. II. esse debebunt. Crura enim hyperbolica speciei $u = \frac{A}{t^3}$, $u = \frac{A}{t^4}$ &c., infinities magis ad suas Asymtotas convergunt, quam species $u = \frac{A}{tt}$. Hinc igitur in enumeratione Specierum, quæ in ordine quopiam superiori continentur, casus impossibiles facile excludi, hocque insignes calculi molestiæ evitari poterunt.

253. Ponamus autem Lineam tertii ordinis a recta quapiam in duobus tantum punctis secari; atque ab omnibus aliis rectis huic parallelis vel in duobus etiam punctis vel nusquam secabitur. Si igitur in Axe quocunque statuantur Applicatæ y huic rectæ parallelæ, æquatio ita erit comparata

$$yy + \frac{(\gamma xx + \zeta x + \theta)y}{\beta x + \varepsilon} + \frac{\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \varkappa}{\beta x + \varepsilon} = 0.$$

Scilicet, si Abscissa AP dicatur $= x$, duæ habebuntur Applicatæ y, nempe PM & $-PN$; erit autem, ex natura æquationum, $PM - PN = \frac{-\gamma xx - \zeta x - \theta}{\beta x + \varepsilon}$. Bisecetur Ordinata MN in puncto O, erit $PO = \frac{\gamma xx + \zeta x + \theta}{\beta x + \varepsilon}$; hinc, si ponatur $PO = z$, erit $z(\beta x + \varepsilon) = \gamma xx + \zeta x + \theta$: unde patet omnia puncta O Ordinatas parallelas MN bisecantia sita esse in Hyperbola, nisi fuerit $\gamma xx + \zeta x + \theta$ divisibile per $\beta x + \varepsilon$, quo casu punctum O positum erit in Linea recta.

254. Quod si ergo $\gamma xx + \zeta x + \theta$ divisibile fuerit per $\beta x + \varepsilon$, tum Curva prædita erit Diametro, seu recta omnes Ordinatas parallelas MN bisecante; quæ proprietas in omnes Lineas secundi ordinis competit. Verum, si $\gamma xx + \zeta x + \theta$ divisibile sit per $\beta x + \varepsilon$, evanescere debebit si ponatur $x = \frac{-\varepsilon}{\beta}$; quare, si fuerit $\gamma\varepsilon\varepsilon - \beta\varepsilon\zeta + \beta\beta\theta = 0$, tum Linea tertii ordinis Diametro erit prædita.

255. Hinc

255. Hinc igitur generalissime omnes casus determinare poterimus, quibus Lineæ tertii ordinis Diametris sunt præditæ. Sit enim proposita æquatio generalis CAP. X.

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma yxx + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \varkappa = 0,$$

cujus Applicatæ y, quia triplicem valorem vel unicum habent, Diametri proprietatem recipere nequeunt. Ducantur ergo sub alio quocunque angulo ad eundem Axem aliæ Applicatæ u, ita ut sit $y = nu$, & $x = t - mu$, ac fiat substitutio

$$\left.\begin{array}{l} + \alpha n^3u^3 + \beta n^2u^2t + \gamma nutt + \delta t^3 + \varepsilon n^2u^2 + \zeta nut + \eta tt + \theta nu + \iota t + \varkappa \\ - \beta mn^2u^3 - 2\gamma mnu^2t - 3\delta mutt - \zeta mnu^2 - 2\eta mut - \iota mu \\ + \gamma m^2nu^3 + 3\delta m^2u^2t \qquad + \eta m^2u^2 \\ - \delta m^3u^3 \end{array}\right\} = 0$$

Primum ergo, quo hæ novæ Applicatæ ad Diametrum recipiendam aptæ reddantur, necesse est ut duplicem tantum valorem inducere possint, eritque idcirco

$$\alpha n^3 - \beta mn^2 + \gamma m^2 n - \delta m^3 = 0.$$

256. Præterea vero requiritur ut quantitas, per quam u est multiplicata, nempe $(\gamma n - 3\delta m)tt + (\zeta n - 2\eta m)t + \theta n - \iota m$, divisibilis sit per eam, quæ uu multiplicat, quæ est $(\beta nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)t + \varepsilon nn - \zeta mn + \eta mm$; sive illa nihilo fieri debet æqualis, si ponatur $t = \dfrac{-\varepsilon nn + \zeta mn - \eta mm}{\beta nn - 2\gamma mn + 3\delta mm}$.

Hinc ergo fiet

$$\iota = \frac{\theta n}{m} - \frac{(\zeta n - 2\eta m)(\varepsilon nn - \zeta mn + \eta mm)}{(\beta nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)m} +$$

$$\frac{(\gamma n - 3\delta m)(\varepsilon nn - \zeta mn + \eta mm)^2}{(\beta nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)^2 m}.$$

257. Si hæc ad Species supra enumeratas applicemus, apparebit in Specie prima nullam prorsus Diametrum locum habere posse. In Specie autem secunda Ordinatæ Axi, in quo Abscissæ

 ciſſæ x capiuntur parallelæ Diametro, biſecabuntur. Species tertia nullam prorſus Diametrum admittit. Species quarta ſemper unam habet Diametrum Ordinatas uni Aſymtotæ parallelas biſecantem. Quinta vero Species tres habebit Diametros, quæ Ordinatas ſingulis Aſymtotis parallelas biſecabunt. Species ſexta nullam prorſus habere poteſt Diametrum. Septima unam Diametrum ſemper habet pro Ordinatis Aſymtotæ ex Factore $x - my$ ortæ parallelis. Octava unam Diametrum habet pro Ordinatis Axi parallelis. Nona Species duas habet Diametros; alteram pro Ordinatis Axi parallelis, alteram pro Ordinatis alteri Aſymtotæ parallelis. Decima uti octava, & undecima uti nona eſt comparata. Duodecima ratione Diametrorum par eſt octavæ, & decima-tertia nonæ. Decima-quarta unam habet Diametrum pro Ordinatis Axi parallelis. Species decima-quinta & ſexta omnino Ordinatas, quæ in duobus punctis Curvam ſecent, non admittunt; ideoque Diametro gaudere nequeunt. Hæ autem Diametrorum proprietates a NEWTONO probe ſunt notatæ, quam ob cauſam earum commemorationem hic data opera attuliſſe juvabit.

258. Quanquam in æquationibus, quas ſupra pro ſingulis Speciebus Linearum tertii ordinis dedimus, Coordinatas x & y inter ſe normales poſuimus, tamen Speciei natura non mutatur, etiamſi eæ quomodocunque ad ſe invicem ſint inclinatæ. Quot enim æquatio, poſitis Coordinatis orthogonalibus, præbet crura in infinitum extenſa, totidem quoque præbebit eadem æquatio, ſi Applicatæ ad Axem utcunque inclinentur. Neque vero etiam natura crurum in infinitum excurrentium mutatur, mutata Coordinatarum inclinatione; quæ enim crura ſunt parabolica, eadem manebunt parabolica, & quæ ſunt hyperbolica eandem naturam retinebunt. Quin etiam Species crurum tam parabolicorum quam hyperbolicorum non alterabitur. Quare omnis Curva, quam æquatio pro prima Specie exhibita præbet, ſive Coordinatæ ſtatuantur rectangulæ ſive obliquangulæ, ſemper ad eandem Speciem primam erit referenda,

referenda, similique modo reliquarum Specierum omnium ratio est comparata. CAP. X.

259. Admissa ergo Coordinatarum obliquitate quacunque, æquationes supra datæ non restringentur, si loco y ponatur νu, & $t - \mu u$ loco x, existente $\mu\mu + \nu\nu = 1$. Sumto autem angulo obliquitatis pro lubitu, æquationes supra datæ simpliciores reddi poterunt. Hinc pro singulis Speciebus sequentes simplicissimæ æquationes inter Coordinatas obliquangulas t & u formabuntur.

SPECIES PRIMA.

$$u(tt + nnuu) + auu + bt + cu + d = 0,$$

existente nec $n = 0$ nec $b = 0$

SPECIES SECUNDA.

$$u(tt + nnuu) + auu + cu + d = 0,$$

non existente $n = 0$.

SPECIES TERTIA.

$$u(tt - nnuu) + auu + bt + cu + d = 0,$$

existente nec $n = 0$, nec $b = 0$, nec $\pm nb + c + \frac{aa}{4nn} = 0$.

SPECIES QUARTA.

$$u(tt - nnuu) + auu + cu + d = 0,$$

existente nec $n = 0$, nec $c + \frac{aa}{4nn} = 0$.

SPECIES QUINTA.

$$u(tt - nnuu) + auu - \frac{aau}{4nn} + d = 0,$$

non existente $n = 0$.

SPECIES SEXTA.

$$tuu + att + bt + cu + d = 0,$$
existente nec $a = 0$, nec $c = 0$.

SPECIES SEPTIMA.

$$tuu + att + bt + d = 0,$$
non existente $a = 0$.

SPECIES OCTAVA.

$$tuu + bbt + cu + d = 0,$$
existente nec $b = 0$, nec $c = 0$.

SPECIES NONA.

$$tuu + bbt + d = 0,$$
non existente $b = 0$.

SPECIES DECIMA.

$$tuu - bbt + cu + d = 0,$$
existente nec $b = 0$, nec $c = 0$.

SPECIES UNDECIMA.

$$tuu - bbt + d = 0,$$
non existente $b = 0$.

SPECIES DUODECIMA.

$$tuu + cu + d = 0,$$
non existente $c = 0$.

SPECIES DECIMA-TERTIA.

$$tuu + d = 0.$$

SPECIES

Species Decima-quarta.

$$u^3 + att + cu + d = 0.$$

Species Decima-quinta.

$$u^3 + atu + bt + d = 0,$$
non existente $a = 0$.

Species Decima-sexta.

$$u^3 + at = 0.$$

CAPUT XI.

De Lineis quarti Ordinis.

260. ÆQuatio generalis pro Lineis quarti Ordinis est

$$\alpha y^4 + \beta y^3 x + \gamma y^2 x^2 + \delta y x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta y^3 + \eta y^2 x + \theta yxx + \iota x^3 + \kappa yy + \lambda yx + \mu xx + \nu y + \xi x + o = 0;$$

quæ autem, (variatis tum Coordinatarum inclinatione, tum Axis positione, tum Abscissarum initio,) multis modis pro diversis casibus ad simpliciorem formam reduci potest. Quo igitur, secundum methodum traditam, omnes *Species* vel potius *Genera* Linearum, quæ in hoc ordine continentur enumerentur, ad membrum supremum respici oportet, unde sequentes casus nascuntur diversi.

I.

Si supremi membri omnes quatuor Factores simplices sunt imaginarii.

II.

Si duo Factores tantum sunt reales & inæquales inter se.

III.

LIB. II. Si duo Factores tantum sunt reales & æquales.

IV.

Si omnes quatuor Factores sunt reales & inæquales.

V.

Si duo Factores inter se sunt æquales, reliquis binis inter se existentibus inæqualibus.

VI.

Si præter duos Factores æquales etiam reliqui duo sint inter se æquales.

VII.

Si tres Factores simplices fuerint inter se æquales.

VIII.

Si omnes quatuor Factores inter se æquales fuerint.

CASUS I.

261. Si omnes Factores membri supremi fuerint imaginarii, Curva ramis in infinitum excurrentibus omnino erit destituta; quoniam igitur ex diversitate ramorum infinitorum discrimen Generum petimus, iste casus unicum præbebit Genus. Erit ergo

GENUS I.

Curvarum ramis in infinitum extensis omnino carentium, quarum natura hac æquatione simplicissima exprimetur

$$(yy + mmxx)(yy - 2pxy + qqxx) + ay^2x + byx^2 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

Existente pp minore quam qq. Quoniam enim in supremo membro termini y^4 & x^4 necessario adsunt, Coordinatis x & y quantitate data sive augendis sive minuendis, effici potest, ut termini y^3 & x^3 ex secundo membro excedant.

CASUS

CASUS II.

262. Si duo Factores membri ſupremi tantum ſint reales & inæquales, per obliquitatem Coordinatarum & Axis mutationem effici poteſt ut alter ſit y alter vero x, æquatio ergo ita ſe habebit Cap. XI.

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byx^2 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0$$

exiſtente mm minore quam nn.

Quia enim in ſupremo membro termini y^3x & yx^3 neceſſario adſunt, in ſecundo membro termini y^3 & x^3 omitti poſſunt. Habebit ergo Curva duas Aſymtotas rectas, alteram æquatione $y = 0$, alteram æquatione $x = 0$, expreſſam. Prioris ergo indoles exponetur hac æquatione $nnyx^3 + exx + gx + h = 0$; poſterioris hac $xy^3 + cyy + fy + h = 0$. Hinc formabitur

GENUS II.

Duabus Aſymtotis rectis, utraque indolis $u = \frac{A}{t}$, præditum, ſi neque c neque e ſit quantitas evaneſcens.

GENUS III.

Duas habet Aſymtotas rectas, alteram indolis $u = \frac{A}{t}$, alteram indolis $u = \frac{A}{tt}$, & exprimitur æquatione

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + fy + gx + h = 0,$$

exiſtente neque $e = 0$, neque $g = 0$.

GENUS IV.

Duas habet Aſymtotas rectas, alteram indolis $u = \frac{A}{t}$, alteram $u = \frac{A}{t^3}$, & continetur hac æquatione

 $yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + fy + h = 0$,
non existente $c = 0$.

GENUS V.

Duas habet Asymtotas rectas, ambas generis $u = \frac{A}{tt}$, & continetur æquatione

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ayyx + byxx + dyx + fy + gx + h = 0,$$
existente neque $f = 0$, neque $g = 0$.

GENUS VI.

Duas habet Asymtotas rectas, alteram indolis $u = \frac{A}{tt}$, & alteram indolis $u = \frac{A}{t^3}$, continetur autem hac æquatione

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ayyx + byxx + dyx + fy + h = 0,$$
non existente $f = 0$.

GENUS VII.

Duas habet Asymtotas rectas, ambas indolis $u = \frac{A}{t^3}$, & continetur hac æquatione

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ayyx + byxx + dyx + h = 0,$$
existente ubique nn majore quam mm.

CASUS III.

263. Sint ambo illi Factores supremi membri, qui soli sunt reales, inter se æquales, atque æquatio erit hujusmodi,

$$yy(yy - 2myx + nnxx) + ayxx + bx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0,$$
existente iterum nn majore quam mm, quæ æquatio, nisi sit $b = 0$, dat

GENUS

Genus VIII.

Habens unam Asymtotam parabolicam speciei $uu = At$.

Si autem b sit $= 0$, posito $x = \infty$, fiet $yy + \frac{ay}{nn} + \frac{e}{nn} + \frac{g}{nnx} + \frac{h}{nnxx} = 0$. Hinc, si fuerit aa minor quam $4nne$, prodit

Genus IX.

Nullum habens ramum in infinitum extensum.

Si fuerit $b = 0$, & aa major quam $4nne$, neque sit $g = 0$, prodit

Genus X.

Duas habens Asymtotas inter se parallelas speciei $u = \frac{A}{t}$.

Si fuerit & $b = 0$, & $g = 0$, & aa major quam $4nne$ prodit

Genus XI.

Duas habens Asymtotas inter se parallelas speciei $u = \frac{A}{tt}$.

Si fuerit $b = 0$, & $aa = 4nne$, nec vero $g = 0$, prodit

Genus XII.

Asymtotam habens hyperbolicam speciei $uu = \frac{A}{t}$.

Si fuerit $b = 0$, $g = 0$, & $aa = 4nne$, atque h quantitas negativa, prodit

Genus XIII.

Asymtotam habens hyperbolicam speciei $uu = \frac{A}{tt}$.

At, si $b = 0$, $g = 0$, $aa = 4nne$, & h quantitas affirmativa, prodit

Genus

GENUS XIV.

Nullos prorſus habens ramos in infinitum extenſos.

CASUS IV.

264. Sint membri ſupremi omnes quatuor Factores ſimplices reales & inæquales, atque æquatio hujuſmodi formam habebit

$$yx(y - mx)(y - nx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

Curva igitur quatuor habebit Aſymtotas rectas ſpeciei vel $u = \frac{A}{t}$, vel $u = \frac{A}{tt}$, vel $u = \frac{A}{t^3}$. Hinc, ad præceptum §. 251. datum, ſequentia orientur Genera.

GENUS XV.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas omnes ſpeciei $u = \frac{A}{t}$.

GENUS XVI.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, tres ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, & unam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

GENUS XVII.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, tres ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, & unam ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$.

GENUS XVIII.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, duas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, & duas ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

GENUS

GENUS XIX.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, duas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, unam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, & unam ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$.

GENUS XX.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, duas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, & duas ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$.

GENUS XXI.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, omnes ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

GENUS XXII.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, tres ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, & unam ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$.

GENUS XXIII.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, duas ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, & duas ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$.

GENUS XXIV.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, omnes ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$.

CASUS V.

265. Sint duo Factores membri ſupremi inter ſe æquales, reliquis exiſtentibus inæqualibus, æquatio erit hujuſmodi

 $yyx(y+nx)+ayxx+bx^3+cyy+dyx+exx+fy+gx+h=0.$

Hinc primo, ratione Factorum æqualium, omnia oriuntur Genera, quæ in *casu III.* & unumquodque cum tot varietatibus occurrit, quot Factores inæquales suggerunt, hoc est quot casus secundus continet Genera. Omnino ergo sexies septem hoc est quadraginta duo Genera ex hoc casu nascuntur. Duo autem hinc prodeunt Genera impossibilia, nempe si ambæ Asymtotæ parallelæ fuerint speciei $u=\frac{A}{tt}$, & reliquarum una $u=\frac{A}{t}$, altera existente vel $u=\frac{A}{tt}$, vel $u=\frac{A}{t^3}$. Quare, hic casus quadraginta Genera præbet, quæ cum antecedentibus numerum Generum *sexaginta-quatuor* conficiunt, quæ singu'a hic describere nimis foret longum. Neque etiam, quia singula hæc Genera evolvere non vacavit, firmiter affirmare licet, omnia esse realia. Qui autem secundum præcepta data hoc negotium in se suscipere voluerit, numerum Generum, si opus fuerit, restringet atque emendabit.

CASUS VI.

266. Hic casus, quo duo Factorum æqualium paria adsunt, ista æquatione continebitur

$$yyxx+ay^3+bx^3+cyy+dyx+exx+fy+gx+h=0.$$

Utrumque autem Factorum æqualium par in se spectatum varietates dat septem, unde ambo paria præbebunt Genera quadraginta novem. Quia vero h simul affirmativum & negativum esse nequit, duo Genera fiunt impossibilia, ideoque ex hoc casu omnino nascuntur Genera quadraginta septem, qui numerus etiam major est quam ut singula hic recenseri queant. Hactenus ergo nacti sumus Genera *centum & undecim.*

CASUS

CASUS VII.

267. Si tres Factores inter se fuerint æquales, æquatio erit ejusmodi

$$y^3x + ayxx + bx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

Hic Factor x præbet Asymtotam speciei $u = \frac{A}{t}$, si non fuerit $c = 0$; at, si $c = 0$, nec vero $f = 0$, Asymtotam dat speciei $u = \frac{A}{tt}$; at, si $c = 0$, & $f = 0$, Asymtotam dat speciei $u = \frac{A}{t^3}$. Deinde Factor y^3, nisi fuerit $b = 0$, dat Asymtotam parabolicam speciei $u^3 = Att$; sin autem $b = 0$, posito x infinito, fit $y^3 + ayx + dy + ex + g + \frac{cyy + fy + h}{x} = 0$. Hic, si non sit $e = 0$, erit $y^3 + ayx + ex = 0$; unde, si nec $a = 0$, erit & $y^2 + ax = 0$ & $ay + e = 0$: simul ergo locum habet Asymtota parabolica speciei $uu = At$, & hyperbolica hac æquatione expressa $(ay + e)x - \frac{e^3}{a^3} - \frac{de}{a} - g + \frac{cee - afe + aah}{aax}$. Nisi ergo sit $e^3 + aade + a^3g = 0$, hæc Asymtota est speciei $u = \frac{A}{t}$; contra vero speciei $u = \frac{A}{tt}$. At, si $a = 0$, non existente $e = 0$, erit $y^3 + ex = 0$: quæ dat Asymtotam parabolicam speciei $u^3 = At$. Sin autem sit $e = 0$, & $a = 0$, fiet $y^3 + dy + g = 0$, quæ æquatio vel unicam præbet Asymtotam speciei $u = \frac{A}{t}$, vel tres ejusdem speciei, vel unam speciei $u = \frac{A}{t}$, & unam speciei $uu = \frac{A}{t}$; vel unam speciei $u^3 = \frac{A}{t}$. Omnino ergo octo varietates occurrunt, quæ, per tres ex Factore x ortas multiplicatæ, dabunt Genera viginti-quatuor. Ergo omnes casus hactenus tractati dant Genera *centum triginta quinque.*

CASUS VIII.

268. Si omnes Factores ſint inter ſe æquales, hæc æquatio locum habebit

$$y^4 + ay^2x + byxx + kx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

Hic, ſi non fuerit $k = 0$, prodit

GENUS CXXXVI.

Unicam habens Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^4 = At^3$.

Sit $k = 0$, non vero $b = 0$, erit $y^4 + byxx + exx = 0$, hincque $y^3 + bxx = 0$, & $by + e = 0$; unde, pro Aſymtota recta $by + e = 0$, erit $(by + e)\,xx + \frac{e^4}{b^4} + \frac{ae^2x}{bb} + \frac{cee}{bb} - \frac{dex}{b} - \frac{ef}{b} + gx + h = 0$; ergo, niſi ſit $aee - bde + bbg = 0$, Aſymtota erit ſpeciei $u = \frac{A}{t}$; contra vero ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$; unde prodeunt

GENUS CXXXVII.

Unam habens Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = Att$, & unam hyperbolicam ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, &

GENUS CXXXVIII.

Unam habens Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = Att$ & unam hyperbolicam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

269. Sit jam $k = 0$, & $b = 0$, ut ſit

$$y^4 + ay^2x + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0,$$

ſi non ſit $e = 0$, erit $y^4 + ayyx + exx = 0$, quæ æquatio ſi fuerit aa minor quam $4e$, eſt impoſſibilis, ſin aa major quam

$4e$,

$4e$, duas præbet Aſymtotas parabolicas ad eundem Axem relatas, ſpeciei $uu = At$; ſin $aa = 4e$, hæ duæ Parabolæ in unam coeunt, quibus Genera CXXXIX. CXL. & CXLI. conſtituuntur. Cap. XI.

At, ſi $e = 0$, ut habeatur hæc æquatio

$$y^4 + ayyx + cyy + dyx + fy + gx + h = 0,$$

ſi non ſit $a = 0$, erit $y^4 + ayyx + cyy + dyx + gx = 0$, ergo & $yy + ax = 0$, & $y =$ conſtanti, erit $ayy + dy + g = 0$, unde y vel duos habet valores diverſos, vel æquales, vel nullum realem. Caſu primo Curva, præter unam Aſymtotam parabolicam, habebit duas Aſymtotas parallelas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$; ſecundo unam ſpeciei $uu = \frac{A}{t}$; tertio nullam: unde iterum tria Genera conſtituuntur nempe CXLII. CXLIII. & CXLIV.

270. Sit nunc etiam $a = 0$, ut ſit

$$y^4 + cyy + dyx + fy + gx + h = 0.$$

Hic, ſi non ſit $d = 0$, Curva habebit Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = At$, & unam rectam æquatione $dy + g = 0$, contentam, ſpeciei $u = \frac{A}{t}$. Denique ſi & $d = 0$, Curva unam habebit Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^4 = At$: ſicque omnino Linearum quarti ordinis conſtituta ſunt Genera *centum quadraginta-ſex*; quæ autem ſingula plerumque plures Species notabiliter differentes ſub ſe complectuntur.

271. Ex his jam clare perſpicitur quantopere Generum numerus in Lineis quinti, altiorisve ordinis, multiplicetur, ut recenſio, qualem pro ordine tertio fecimus, inſtitui prorſus nequeat, niſi quis integrum volumen huic operi deſtinare velit. Quod autem ad primarias proprietates Linearum quarti altiorisve ordinis attinet, eæ ex æquatione generali ſimili modo derivabuntur, quo ſupra in Lineis tertii ordinis ſumus uſi, neque idcirco earum explicationi immorabimur.

LIB. II.

CAPUT XII.

De investigatione figuræ Linearum Curvarum.

272. Quæ in his Capitibus sunt exposita, inserviunt figuræ Linearum curvarum in infinitum extensarum cognoscendæ. Cujusmodi vero figuram habeat quæpiam Linea curva in spatio finita, sæpenumero difficillimum est ex æquatione cognoscere. Oportet enim ad hoc pro quavis Abscissa finita valores Applicatæ respondentes singulos ex æquatione eruere, atque reales ab imaginariis discernere: quod negotium, si æquatio sit altioris gradus, plerumque vires Analyseos cognitæ superat. Quod si enim Abscissæ valor quicunque cognitus tribuatur, Applicata in æquatione incognitæ vicem sustinebit. Hincque a numero dimensionum, quem Applicata obtinet, pendebit æquationis resolutio. Negotium autem hoc per reductionem æquationis ad formam simpliciorem, dum & Axis commodissimus, & inclinatio Coordinatarum aptissima assumitur, valde sublevari potest: tum etiam, quia perinde est, utra Coordinatarum pro Abscissa accipiatur, labor maxime diminuetur, si ea Coordinatarum, cujus paucissimæ dimensiones in æquatione occurrunt, pro Applicata assumatur.

273. Sic, si figuras Linearum tertii ordinis, quæ ad Speciem primam pertinent, investigare velimus, assumemus æquationem pro hac Specie simplicissimam, §. 258. exhibitam, & ex Coordinatis t & u priorem t pro Applicata, alteram vero x pro Abscissa, quia t duas tantum dimensiones habet. Hujusmodi ergo æquationis formam habebimus,

$$yy = \frac{2by + axx + cx + d - nnx^3}{x}$$

quæ resoluta dat

$y =$

$$y = \frac{b \pm \sqrt{(bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4)}}{x}$$ CAP. XII.

existente neque b neque $n = 0$.

274. Qui ergo valores ipsius x Functioni $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ valorem affirmativum induunt, iis duplex Applicata respondet; quibus casibus vero hæc Functio evanescit, iisdem unica Applicata y Abscissæ x convenit, seu binæ Applicatæ inter se fiunt æquales. At, si Functio illa valorem negativum obtinet, tum Abscissæ nulla prorsus Applicata respondet. Sed valores istius Functionis, si fuerint affirmativi, in negativos abire nequeunt, nisi prius facti sint æquales, seu Functio evanuerit. Casus igitur potissimum erunt considerandi, quibus Functio $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ fit $= 0$; quod quidem certo duobus evenit casibus: quoniam, si x certum limitem sive affirmative sive negative transgrediatur, ejus valor fit negativus. Hinc tota Curva determinato Abscissæ spatio respondebit, ultra quod omnes Applicatæ fiant imaginariæ.

275. Ponamus expressionem $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ duos tantum habere Factores reales, seu duobus tantum casibus evanescere posse; quod eveniat, si Abscissa determinetur in punctis P & S, ubi unica tantum Applicata reperiatur. Per totum ergo spatium PS Applicatæ erunt geminæ & reales, extra spatium vero PS omnes Applicatæ erunt imaginariæ: ideoque tota Curva intra Applicatas Kk & Nn jacebit. Applicata vero in initio Abscissarum A erit Asymtota Curvæ, quæ præterea Curvam in puncto quopiam secabit; si enim ponatur $x = 0$, fiet $\sqrt{(bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4)} = b + \frac{dx}{2b}$, unde erit $y = \frac{b \pm (b + \frac{dx}{2b})}{x}$, hoc est, erit vel $y = \infty$, vel $y = \frac{-d}{2b}$. Curva ergo hoc casu ejusmodi habet formam qualem *Figura* 50. repræsentat. TAB. XIII. Fig. 49. TAB. XIII.

276. Ponamus expressionem $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ quatuor habere Factores simplices reales inæquales; ideoque quatuor casibus evanescere. In totidem ergo locis P, Q, R

&

LIB. II. & S Applicatæ Curvam in unico puncto ſtringent. Cum igitur Applicatæ per Axis ſpatium XP fuiſſent imaginariæ, nunc per ſpatium PQ erunt reales: tum vero per ſpatium QR erunt iterum imaginariæ, ac per RS rurſus reales. Extra S vero verſus Y denuo fient imaginariæ. Hinc Curva conſtabit duabus partibus a ſe invicem ſeparatis, quarum altera intra rectas Kk & Ll, altera intra rectas Mm & Nn continetur. Cum vero in Abſciſſarum initio A Applicatæ ſint reales, neceſſe eſt ut id vel in Axis intervallo PQ vel RS ſit ſitum. Hoc ergo
TAB. XIV. caſu Curva figuram habebit, qualem *Figura* 51. oſtendit, ſcilicet conſtabit Ovali a reliqua Curva ad Aſymtotam DE relata, diſtante, quæ vocatur OVALIS CONJUGATA.

277. Si duæ radices fiant inter ſe æquales, vel puncta P & Q, vel Q & R, vel R & S, convenient. Verum, ſi prius eveniat, quia A intra P & Q jacet, utraque radix deberet eſſe x; quod quia b deeſſe nequit, fieri non poteſt. Sin autem puncta R & S conveniant, Ovalis conjugata fiet infinite parva, & abibit in PUNCTUM CONJUGATUM. At, ſi puncta Q & R conveniant, Ovalis cum reliqua Curva
TAB. XIV. ita conjungetur ut prodeat Curva NODATA *Figura* 52. Quod ſi vero tres radices congruant, ſeu puncta Q, R & S conveniant, tum nodus in CUSPIDEM acutiſſimam evaneſcet,
TAB. XIV. qualem *Figura* 53. repræſentat. Sic igitur quinque diverſæ varietates in ſpecie prima locum habent, ex quibus NEWTONUS totidem conſtituit Species.

278. Simili modo ſubdiviſiones reliquarum Specierum a NEWTONO ſunt factæ, quoniam omnes æquationes ita ſunt comparatæ, ut altera Coordinata plures duabus non habeat dimenſiones. Quando vero altera Coordinata unicam habet dimenſionem, forma Curvæ facillime cognoſcetur. Æquatio enim erit hujuſmodi $y = P$, exiſtente P Functione quapiam rationali Abſciſſæ x; quicunque ergo ipſi x valor tribuatur, Applicata quoque ſemper unum obtinet valorem, ideoque Curva continuo tractu Axem utrinque in infinitum comitabitur. Si Functio P ſit fracta, fieri poteſt, ut Applicata in uno pluribuſve

busve locis fiat infinita, ideoque Curvæ Asymtotam exhibeat, quod evenit ubi denominator Functionis P evanescit. CAP. XII.

279. Ponatur ergo $y = \frac{P}{Q}$, atque istas Applicatas infinitas ostendent omnes radices reales æquationis $Q = 0$: quælibet enim radix hujus æquationis, puta $x = f$, declarat, si sumatur Abscissa $x = f$, fore Applicatam y infinitam, quia fit $Q = 0$. Tum vero patet, si fuerint Applicatæ y affirmativæ, dum esset x major quam f, easdem, facto x minore quam f, futuras esse negativas; ideoque Applicata erit Asymtota speciei $u = \frac{A}{t}$: hocque de omnibus Factoribus inæqualibus est tenendum. Sin autem denominator Q duos habuerit Factores æquales, puta $(x - f)^2$, tum si Applicatæ sint affirmativæ sumto f majore quam x, manebunt affirmativæ si ponatur x minor f, eritque Applicata y, facto $x = f$, Asymtota speciei $uu = \frac{A}{t}$. At, si denominator Q tres habuerit Factores æquales, nempe $(x - f)^3$, tum Applicatæ ante & post illam quæ fit infinita, diversa habebunt signa, uti casu primo.

280. Post has æquationes facillime tractantur, quæ in hac forma continentur $yy = \frac{2Py - R}{Q}$, existentibus P, Q, & R Functionibus quibuscunque integris Abscissæ x. Cuique igitur Abscissæ x vel geminæ convenient Applicatæ vel nulla; duæ scilicet prodeunt Applicatæ si fuerit PP major quam QR, & nulla si PP minor quam QR: in quolibet ergo limite, qui Applicatas reales ab imaginariis seu nullis dirimit, erit $PP = QR$; ideoque fit $y = \frac{P}{Q}$, seu hæc Applicata Curvam in unico puncto stringet vel tanget. Ad Curvæ ergo formam cognoscendam consideretur æquatio $PP - QR = 0$, cujus singulæ radices reales dabunt loca, ubi Applicatæ Curvam in unico puncto stringunt. Notentur hæc puncta in Axe,

atque, si omnes radices fuerint inæquales, Axis partes inter hæc puncta contentæ alternatim habebunt Applicatas geminas reales, & imaginarias; sicque Curva tot constabit partibus a se invicem sejunctis, quot hujusmodi alternationes adesse deprehenduntur, unde Ovales conjugatæ originem ducunt.

281. Si æquationis $PP - QR = 0$, duæ radices fiant æquales, tum illorum in Axe notatorum punctorum duo convenient, hincque in Axe portio vel imaginarias habens Applicatas vel reales evanescet. Priori casu Curva prodibit nodata uti in *Figura* 52.; posteriori Ovalis conjugata in punctum conjugatum evanescet. Quod si autem illa æquatio tres habuerit radices æquales, Nodus fiet infinite parvus atque in Cuspidem abibit, ut in *Figura* 53; si quatuor affuerint radices æquationis æquales, vel duæ Ovales separatæ concrescent in punctum, vel in ipsa Cuspide dabitur Nodus, seu duæ Cuspides ad verticem oppositæ. Sin quinque radices æquales affuerint, novæ fere formæ non proveniunt; Cuspis enim oritur in qua non una, ut ante, sed duæ Ovales in punctum coalescunt; neque etiam major radicum æqualium multitudo novum discrimen in figuris resultantibus producit.

TAB. XIV.

TAB. XIV.

282. Nodus seu intersectio duorum Curvæ ramorum vocari etiam solet PUNCTUM DUPLEX, propterea quod Linea recta Curvam in eo puncto secans, eam in duobus punctis secare censenda est. Atque, si per Nodum alius Curvæ ramus transiret, tum in hac intersectione nascetur punctum Curvæ *triplex*; punctum vero *quadruplex* orietur, si duo puncta duplicia conveniunt, ex quo genesis & natura punctorum quorumvis *multiplicium* perspicitur. Erit ergo etiam Ovalis evanescens, seu punctum conjugatum, punctum duplex, pariter ac Cuspis, quæ oritur a puncto conjugato cum reliqua Curva connexo.

283. Si æquatio, qua Applicata y per Abscissam x exprimitur, sit cubica vel altioris gradus, ita ut y æquetur Functioni multiformi ipsius x; tum unicuique Abscissæ convenient vel tot Applicatæ, quot y in æquatione habet dimensiones, vel earum numerus minuetur binario vel quaternario, vel senario

&c.

&c. Perpetuo ergo binæ Applicatæ ſimul imaginariæ eſſe incipiunt, atque prius quam imaginariæ evadunt, inter ſe fiunt æquales. Hinc ex tranſitione ab imaginariis ad reales plures naſcuntur varietates, quæ autem cum his, quas modo explicavimus, vel conveniunt vel ex iis ipſis ſunt compoſitæ. Quod ſi autem pro plurimis Abſciſſis tam affirmativis quam negativis quærantur omnes Applicatæ valores, tum per hæc puncta inventa Curva facile delineabitur, ejuſque figura cognoſcetur. CAP. XII.

284. Illuſtremus hæc exemplo, quod, quamvis ortum ſit ex æquatione altioris gradus, tamen Applicata y per ſolas radices quadratas exprimatur. Sit nimirum

$$2y = \pm\sqrt{(6x - xx)} \pm \sqrt{(6x + xx)} \pm \sqrt{(36 - xx)}$$

ex qua æquatione cuivis Abſciſſæ octuplex Applicata reſpondet. Perſpicuum autem eſt, ſi Abſciſſa x ſtatuatur negativa, tum Applicatam fore imaginariam; quod idem evenit ſi Abſciſſa x ſumatur major quam 6: ex quo tota Curva intra limites $x = 0$, & $x = 6$ continebitur. Ponantur ergo pro x ſucceſſive valores, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, eritque

ſi	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$	$x = 6$
$\sqrt{(6x - xx)}$	0,000	2,235	2,828	3,000	2,828	2,235	0,000
$\sqrt{(6x + xx)}$	0,000	2,645	4,000	5,196	6,324	7,416	8 484
$\sqrt{(36 - xx)}$	6,000	5.916	5,656	5,196	4.470	3.316	0 000
ſumma	6 000	10,796	12,484	13,392	13 622	12,967	8 484
hinc y ſi							
$+ + +$	3,000	5,398	6,242	6,696	6,811	6,483	4,242
$- + +$	3,000	3,163	3,414	3,696	3,983	4,248	4 242
$+ - +$	3,000	2,753	2,242	1,500	0,487	0,933	-4 242
$+ + -$	-3,000	-0,518	0,586	1,500	2,341	3,167	4,242

Reliquæ quatuor ſignorum permutationes ab his tantum ratione ſignorum differunt. Hinc cuilibet Abſciſſæ octuplex Applicata reſpondet, quæ ſi in figura exhibeantur, prodibit Linea curva TAB. XIV. *Fig.* 54.

LIB. II. duplici plexu *AFBEcagbcDA*, & *afbECAGBCDa* constans, duas habens Cuspides in *A* & *a*, & puncta duplicia seu ramorum intersectiones quatuor in *D*, *E*, *C* & *c*.

CAPUT XIII.

De Affectionibus Linearum Curvarum.

285. QUemadmodum supra ramorum in infinitum extensorum indolem ita descripsimus, ut Lineam rectam, vel Curvam simpliciorem, assignaverimus, quæ cum illa Curva in infinito confunderetur; ita in hoc Capite constituimus quamvis Curvæ portionem in spatio finito existentem examini subjicere, atque rectam vel Curvam simpliciorem investigare, quæ cum illa Curvæ portione saltem per minimum spatium congruat. Ac primo quidem patet omnem Lineam rectam, quæ Curvam tangit, in eo loco ubi tangit, cum tractu Lineæ curvæ congruere, seu cum Linea curva duo ad minimum puncta communia habere. Tum vero etiam aliæ Lineæ curvæ exhiberi possunt, quæ cum data Curvæ portione accuratius congruant, eamque quasi osculentur. His autem cognitis, status Lineæ curvæ in quovis loco, ejusque affectiones clarissime erunt perspectæ.

TAB. XV. *Fig.* 55. 286. Sit igitur proposita æquatio quæcunque inter Coordinatas x & y pro Curva quapiam. Tribuatur Abscissæ x valor quispiam $AP = p$, & quærantur valores Applicatæ y huic Abscissæ respondentes, qui si plures fuerint, sumatur pro lubitu unus $PM = q$, eritque M punctum in Curva, seu punctum per quod Curva transibit. Tum vero, si in æquatione inter x & y proposita, loco x scribatur p, & q loco y, omnes æquationis termini se mutuo tollent, ita ut nihil remaneat. Jam ad naturam illius Curvæ portionis, quæ per punctum M transit, indagandam, ex M ducatur recta Mq

Axi

Axi AP parallela, quæ nunc pro Axe accipiatur, & vocetur hic nova Abſciſſa $Mq = t$, Applicata $qm = u$. Quia igitur punctum m pariter in Curva eſt poſitum, ſi mq uſque ad priorem Axem in p producatur, atque $Ap = p + t$ in locum ipſius x, & $pm = q + u$ in locum ipſius y ſubſtituatur, æquatio pariter identica prodire debet. Cap. XIII.

287. Facta autem hac ſubſtitutione in æquatione inter x & y propoſita, omnes termini, in quibus neque t nec u ineſt, ſe mutuo ſponte deſtruent, illique termini, qui novas Coordinatas t & u continent, ſoli ſupererunt. Hinc ergo ejuſmodi prodibit æquatio

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Euu + Ft^3 + Gt^2u + Htuu + \&c.;$$

ubi A, B, C, D, &c. ſunt quantitates conſtantes ex conſtantibus primæ æquationis & ipſis p & q, quas nunc pro conſtantibus habemus, compoſitæ. Iſta igitur nova æquatione natura ejuſdem Curvæ exprimitur, verum ad Axem Mq refertur, & in quo ipſum Curvæ punctum M pro initio Abſciſſarum aſſumitur.

288. Ac primo quidem patet, ſi ponatur $Mq = t = 0$, tum quoque fore $qm = u = 0$, quia punctum m in M incidit. Deinde, quia tantum minimam Curvæ portionem circa M verſantem indagare volumus, hoc impetrabimus, ſi pro t valores quam minimos aſſumamus; quo caſu quoque $qm = u$ valorem habebit minimum; naturam enim Arcus Mm quaſi evaneſcentis tantum deſideramus. Quod ſi vero pro t & u ſumantur valores quam minimi, termini tt, tu, & uu multo adhuc erunt minores, atque ſequentes t^3, t^2u, tuu, u^3, &c., multo quoque erunt minores quam illi, & ita porro: quam ob cauſam, cum termini minimi præ aliis quaſi infinite majoribus omitti queant, remanebit iſta æquatio $0 = At + Bu$, quæ eſt æquatio pro Linea recta $M\mu$ per punctum M tranſeunte, atque indicat hanc rectam, ſi punctum m ad M proxime accedat, cum Curva congruere.

LIB. II. 289. Erit ergo hæc recta $M\mu$ Tangens Curvæ in loco M, ideoque hinc ad quodvis punctum Curvæ M Tangens μMT duci poteſt. Scilicet, cum ex æquatione $At + Bu = 0$, ſit $\frac{u}{t} = \frac{-A}{B} = \frac{q\mu}{Mq}$, erit $q\mu : Mq = MP : PT = -A : B$. Ergo, cum ſit $PM = q$, fiet $PT = \frac{-Bq}{A}$: vocari autem hæc Axis portio PT ſolet SUBTANGENS. Ex his ergo hæc deducitur

REGULA

Pro invenienda Subtangente.

In æquatione pro Curva, poſtquam Abſciſſæ $x = p$ inventa fuerit ſatisfacere Applicata $y = q$, ponatur $x = p + t$, & $y = q + u$; ex terminis autem, qui per ſubſtitutionem oriuntur, ii tantum retineantur, in quibus t & u unicam dimenſionem tenent, reliquis omnibus neglectis. Sicque ad duos tantum terminos $At + Bu = 0$ pervenietur: unde, cognitis A & B, erit Subtangens $PT = \frac{-Bq}{A}$.

EXEMPLUM I.

Sit propoſita Curva Parabola, *cujus natura hac exprimitur æquatione* $yy = 2ax$, *exiſtente* AP *Axe principali & A Vertice.*

Sumatur $AP = p$; &, ſi vocetur $PM = q$, erit $qq = 2ap$, ſeu $q = \sqrt{2ap}$. Jam ponatur $x = p + t$ & $y = q + u$, eritque $qq + 2qu + uu = 2ap + 2at$: unde, per regulam, hi tantum termini $2qu = 2at$ retineantur, qui dant $at - qu = 0$, $\frac{u}{t} = \frac{a}{q} = \frac{-A}{B}$, erit ergo Subtangens $PT = \frac{qq}{a} = 2p$, ob $qq = 2ap$. Hinc Subtangens PT erit dupla Abſciſſæ AP.

EXEM-

Exemplum II.

Sit Curva Ellipsis *Centro* A *descripta, cujus æquatio est* $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$, *seu* $aayy + bbxx = aabb$.

Sumta ergo $AP = p$. &, posita $PM = q$, erit $aaqq + bbpp = aabb$. Jam ponatur $x = p + t$ & $y = q + u$; &, quoniam ii tantum termini retineri debent, in quibus t & u unicam habent dimensionem, reliqui statim omitti possunt; fietque $2aaqu + 2bbpt = 0$, unde $\frac{u}{t} = \frac{-bbp}{aaq} = \frac{-A}{B}$. Erit ergo Subtangens $PT = \frac{-B}{A}q = \frac{-aaqq}{bbp} = \frac{-aa+pp}{p}$: quæ expressio, cum sit negativa, indicat punctum T in partem contrariam cadere. Ceterum hæc expressio egregie convenit cum determinatione Tangentium Ellipsis supra tradita.

Exemplum III.

Sit proposita Linea tertii ordinis *Speciei septimæ* $yyx = axx + bx + c$.

Sumta ergo $AP = p$, & posita $PM = q$, erit $pqq = app + bp + c$. Jam statuatur $x = p + t$ & $y = q + u$, eritque $(p+t)(qq + 2qu + uu) = a(pp + 2pt + tt) + b(p+t) + c$. Rejectis omnibus terminis superfluis, erit $2pqu + qqt = 2apt + bt$, unde fit $\frac{u}{t} = \frac{2ap + b - qq}{2pq} = -\frac{A}{B}$; ideoque Subtangens $PT = \frac{-B}{A}q = \frac{2pqq}{2ap + b - qq} = \frac{2app + 2bp + 2c}{2ap + b - qq} = \frac{2ap^3 + 2bpp + 2cp}{app - c}$, vel $PT = \frac{2ppqq}{app - c}$.

290. Cognita ergo hoc modo Tangente Curvæ, simul cognoscitur directio, quam Curva sequitur in puncto M. Linea enim Curva aptissime considerari potest tanquam via, quam describit punctum continuo promotum cum variata continuo

motus

Lib. II. motus directione. Ideoque punctum, quod Curvam $M\mu$ motu suo describit in M promovebitur secundum directionem Tangentis $M\mu$; quam directionem si conservaret, describeret rectam $M\mu$: at e vestigio directionem motus inflectit, si quidem Lineam curvam describit: unde ad tractum Lineæ curvæ cognoscendum in singulis punctis positionem Tangentis definire oportet, id quod facile fit methodo hic tradita, neque enim ulla offenditur difficultas, dummodo æquatio pro Curva proposita fuerit rationalis atque a fractionibus libera. Ad talem autem formam æquationes omnes semper reduci possunt. Sin autem æquatio fuerit vel irrationalis vel fractionibus implicata, neque eam ad formam rationalem & integram reducere vacaverit, tum eadem quidem methodus, at cum moderatione quadam, adhiberi potest, quæ ipsa moderatio *Calculum differentialem* produxit; quam ob rem methodum inveniendi Tangentes, si æquatio pro Curva proposita non fuerit rationalis & integra, in calculum differentialem reservabimus.

291. Hinc ergo innotescit inclinatio Tangentis $M\mu$ ad Axem AP, seu ejus parallelam Mq. Cum enim sit $q\mu : Mq = -A : B$, si Coordinatæ fuerint orthogonales ideoque angulus $Mq\mu$ rectus, erit $\frac{-A}{B}$ Tangens anguli $qM\mu$; sin autem Coordinatæ fuerint obliquangulæ, tum ex angulo $Mq\mu$ dato & ratione laterum Mq, $q\mu$ per Trigonometriam reperietur angulus $qM\mu$. Patet autem, si in æquatione resultante $At + Bu = 0$, fuerit $A = 0$, tum angulum $qM\mu$ evanescere, ideoque Tangentem $M\mu$ fore Axi AP parallelam. Sin autem fuerit $B = 0$, tum Tangens $M\mu$ Applicatis PM erit parallela, seu ipsa Applicata PM Curvam in puncto M tanget.

292. Inventa Tangente MT, si ad eam in puncto contactus M ducatur normalis MN, erit hæc ad ipsam Curvam simul normalis; cujus propterea positio quovis casu facile reperitur. Commodissime autem exprimitur, si Coordinatæ AP & PM fuerint orthogonales, tum enim erunt triangula $Mq\mu$ & MPN

similia;

similia, ideoque $Mq : q\mu = MP : PN$, seu $-B : A =$ Cap. XIII.
$q : PN$; unde fit $PN = \frac{-Aq}{B}$. Vocari autem hæc Axis portio PN, inter Applicatam & Normalem MN intercepta, solet SUBNORMALIS. Hæc igitur Subnormalis, si Coordinatæ fuerint orthogonales, ex inventa Subtangente PT facillime definitur; erit enim $PT : PM = PM : PN$, seu $PN = \frac{PM^2}{PT}$. Præterea vero, si angulus APM fuerit rectus, erit ipsa tangens $MT = \surd(PT^2 + PM^2)$ & ipsa normalis $MN = \surd(PM^2 + PN^2)$; seu, cum sit $PT : TM = PM : MN$, erit $MN = \frac{PM \cdot TM}{PT} = \frac{PM}{PT}\surd(PT^2 + PM^2)$.

293. Quoniam vidimus, si in æquatione $At + Bu = 0$, fuerit vel $A = 0$ vel $B = 0$, tum Tangentem fore vel Axi vel Applicatis parallelam; superest casus, quo uterque coëfficiens A & B simul fit $= 0$, considerandus. Hoc ergo cum evenit, in æquatione supra (§. 286.) inventa, sequentes termini, in quibus t & u duas obtinent dimensiones, non amplius præ his $At + Bu$, (qui ipsi evanescunt,) negligi poterunt. Hanc ob rem consideranda veniet hæc æquatio $0 = Ctt + Dtu + Euu$, neglectis sequentibus terminis; quippe qui præ his, si t & u statuantur infinite parva, evanescunt. Ex hac igitur æquatione, uti ex generali, manifestum est, si ponatur $t = 0$, fore & $u = 0$, ideoque M esse punctum in Curva, quod quidem Hypothesi est consentaneum.

294. Cum igitur hæc æquatio $0 = Ctt + Dtu + Euu$ statum Curvæ prope punctum M declaret; manifestum est, si fuerit DD minor quam $4CE$, tum æquationem fore imaginariam, nisi sint t & $u = 0$. Hoc igitur casu punctum M quidem ad Curvam pertinebit, verum erit sejunctum a reliqua Curva; eritque ideo Ovalis conjugata in punctum evanescens, cujusmodi casum in Capite præcedente notavimus. Hic igitur ne idea quidem Tangentis locum habet; quia, si Tan-

LIB. II. gens eſt recta duo puncta proxima cum Curva habens communia, punctum a recta tangi hoc modo non poteſt. Hoc itaque pacto punctum conjugatum, ſi quod datur in Curva quapiam, agnoſcetur atque a reliquis Curvæ punctis diſcernetur.

TAB. XV. Fig. 56. 295. Quod ſi autem fuerit DD major quam $4CE$, æquatio $0 = Ctt + Dtu + Euu$ reſolubilis erit in duas æquationes hujus formæ $\alpha t + \beta u = 0$, quarum utraque in Curvæ naturam æque competit. Cum igitur utraque poſitionem Tangentis ſeu directionem Curvæ in puncto M exhibeat, neceſſe eſt ut duo Curvæ rami ſe in puncto M decuſſent, ibique punctum duplex conſtituant. Sumta ſcilicet $Mq = t$, ſint $q\mu$ & $q\nu$ ambo valores ipſius u, quos illa æquatio præbet, atque rectæ $M\mu$ & $M\nu$ erunt ambæ Tangentes Curvæ in puncto M. In M ergo erit interſectio duorum Curvæ ramorum, quorum alter ſecundum $M\mu$, & alter ſecundum $M\nu$ dirigitur. Cum igitur punctum conjugatum pariter pro puncto duplici ſit habendum, hæc æquatio $Ctt + Dtu + Euu = 0$, ſemper punctum duplex indicabit, quemadmodum æquatio $At + Bu = 0$, quoties locum habet, punctum Curvæ tantum ſimplex declarat.

296. Sin autem fuerit $DD = 4CE$, tum ambæ iſtæ Tangentes $M\mu$ & $M\nu$ coincident, & angulus $\mu M \nu$ evaneſcet; ex quo intelligitur duos Curvæ ramos in M non ſolum concurrere, ſed etiam eandem directionem habere, ideoque ſe invicem tangere; quo caſu punctum M nihilominus erit duplex, quia recta per hoc punctum ducta Curvam hoc loco in duobus punctis ſecare eſt cenſenda. Quando ergo in æquatione, quam §. 286. obtinuimus, ambo coëfficientes primi A & B evaneſcunt, tum concludenda eſt Curva in M punctum duplex habere, cujus tres dantur Species diverſæ; vel Ovalis in punctum evaneſcens ſeu punctum conjugatum, vel duorum Curvæ ramorum interſectio mutua ſeu nodus, vel duorum Curvæ ramorum contactus, quas diverſas puncti duplicis Species triplex æquationis $0 = Ctt + Dtu + Euu$ conſtitutio definit.

297. Si

297. Si præter coëfficientes A & B, etiam hi tres C, D, & E omnes evanescant, tum sequentes sumi debebunt termini, in quibus t & u tres obtinent dimensiones, eritque $Ft^3 + Gttu + Htuu + Iu^3 = 0$. Quæ æquatio si unicum habeat Factorem simplicem realem, hic ostendet unum Curvæ ramum per punctum M transeuntem ejusque simul directionem seu Tangentem; bini vero reliqui Factores imaginarii in ipso puncto M Ovalem evanescentem, arguent. Sin autem omnes radices illius æquationis fuerint reales, hinc cognoscetur tres Curvæ ramos se in eodem puncto M vel decussare vel tangere, prout illæ radices fuerint vel inæquales vel æquales. Quicquid horum evenerit, Curva in M semper habebit punctum triplex, atque recta per M ducta Curvam simul in tribus punctis secare putanda est. CAP. XIII.

298. Quod, si præter omnes coëfficientes præcedentes etiam hi quatuor F, G, H, & I evanescant; tum, ad naturam puncti Curvæ M cognoscendam, contemplari oportebit terminos æquationis sequentes, in quibus t & u quatuor habeant dimensiones: unde punctum M quadruplex erit judicandum. In eo enim vel duæ Ovales conjugatæ coalescunt; quod evenit si æquationis quarti gradus omnes radices fuerint imaginariæ. Vel in M erit intersectio seu contactus duorum Curvæ ramorum cum puncto conjugato; quod evenit si duæ radices fuerint reales, duæ reliquæ vero imaginariæ. At in M denique erit intersectio quatuor Curvæ ramorum, si omnes radices æquationis fuerint reales; intersectio autem vel duorum vel trium vel omnium quatuor abibit in contactum, si duæ tres vel omnes quatuor radices fiant æquales. Simili autem modo in judicio erit progrediendum, si etiam his terminis, ubi t & u quatuor obtinent dimensiones, evanescentibus, procedendum erit ad terminos quinque ulteriorumve dimensionum.

299. His perpensis, facile erit æquationem generalem pro omnibus Curvis invenire quæ non solum per punctum M transeant, sed etiam in M habeant punctum vel simplex vel

LIB. II. duplex, vel triplex, vel totuplex, prout quis voluerit. Positis enim $AP = p$, $PM = q$, ac denotantibus P, Q, R, S, &c. Functiones quascunque Coordinatarum x & y, manifestum est hanc æquationem $P(x-p) + Q(y-q) = 0$, exprimere Curvam per punctum M transeuntem; si enim ponatur $x = AP = p$, fiet $y = PM = q$; dummodo neque P per $y-q$, nec Q per $x-p$ fuerit divisibile, vel dummodo hi Factores $x-p$ & $y-q$, a quibus transitus Curvæ per punctum M pendet, ex æquatione per divisionem non eliminentur. Perspicuum autem est omnes Curvas, quæ quidem per punctum M transeant, in ista æquatione $P(x-p) + Q(y-q) = 0$, contineri; erit vero M punctum simplex, si hæc æquatio non fuerit ejus formæ, qualem pro punctis multiplicibus mox exhibebimus.

300. Si M debeat esse punctum duplex, æquatio pro Curva in hac forma generali continebitur $P(x-p)^2 + Q(x-p)(y-q) + R(y-q)^2) = 0$, dummodo hæc forma per divisionem non pereat. Perspicitur hinc in Lineas secundi ordinis punctum duplex cadere non posse, quo enim illa æquatio secundi tantum sit, necesse est ut P, Q, & R sint quantitates constantes; tum autem æquatio non erit pro Linea curva, sed pro duabus rectis. Sin autem P, Q, R sint Functiones primi ordinis, ut $\alpha x + \beta y + \gamma$, tum Lineæ habebuntur tertii ordinis in M punctum duplex habentes. At vero Linea tertii ordinis, nisi ex tribus rectis constet, plus uno puncto duplici habere nequit. Ponamus enim dari duo puncta duplicia, atque per ea Lineam rectam duci; hæc Linea recta Curvam in quatuor punctis secaret, quod naturæ Linearum tertii ordinis adversatur. Linea quarti ordinis duo tantum habebit puncta duplicia; Linea quinti ordinis plura tribus habere non poterit, & ita porro.

301. Sit M punctum Curvæ triplex, atque natura Lineæ curvæ hac exprimetur æquatione $P(x-p)^3 + Q(x-p)^2(y-q) + R(x-p)(y-q)^2 + S(y-q)^3 = 0$. Hæc æquatio igitur si Lineam curvam definiat, tertium ordinem superabit,

perabit; namque si P, Q, R, & S essent constantes, quod Linearum tertii ordinis natura exigit, tum æquatio tres haberet Factores formæ $\alpha(x-p)+\beta(y-q)$, ideoque foret pro tribus rectis. In Curvas ergo quarto ordine simpliciores punctum triplex non cadit; neque Lineæ quinti ordinis plus uno puncto triplici habere possunt, alioquin enim daretur recta Lineam quinti ordinis in sex punctis secans. Nihil autem impedit quo minus Linea sexti ordinis duo habeat puncta triplicia. Cap. XIII.

302. Si æquatio in hac forma contineatur: $P(x-p)^4 + Q(x-p)^3(y-q) + R(x-p)^2(y-q)^2 + S(x-p)(y-q)^3 + T(y-q)^4 = 0$, tum Curva in M habebit punctum quadruplex. Linea ergo curva simplicissima, quæ puncto quadruplici gaudeat, ad Linearum ordinem quintum pertinebit. Duo vero puncta quadruplicia non cadunt nisi in Lineas aut octavi aut altioris gradus. Simili modo æquationes generales exhiberi possunt pro Lineis, quæ in M habeant punctum quintuplex, vel pro lubitu multiplex.

303. Quod, si autem M fuerit vel punctum duplex vel triplex vel utcunque multiplex, tum vel totidem Curvæ rami se mutuo in puncto M secabunt sive tangent; vel, si numerus ramorum se intersecantium sit minor, tum unum plurave puncta conjugata in eodem puncto M concrescent: qui Curvæ status cognoscetur ex iis, quæ ante sunt tradita. Scilicet, in Functionibus P, Q, R, S, &c., ubique loco x & y scribi debent p & q, & t & u loco Factorum $x-p$ & $y-q$; tum enim prodibunt ejusmodi æquationes, ex quibus constitutio Curvæ & ramorum se in M intersecantium Tangentes definiri poterunt.

Lib. II.

CAPUT XIV.

De curvatura Linearum curvarum.

304. Quemadmodum in ſuperiori Capite lineas rectas indagavimus, quæ in quovis puncto Lineæ curvæ ipſius directionem indicabant, ita hic Lineas curvas ſimpliciores inveſtigabimus, quæ in quovis loco cum Curva propoſita tam exacte congruant, ut ſaltem per minimum ſpatium quaſi confundantur. Sic enim cognita indole Curvæ ſimplicioris, ſimul Curvæ propoſitæ natura inde colligetur. Simili methodo ſcilicet hic utemur, qua ſupra ad naturam ramorum in infinitum extenſorum ſcrutandam ſumus uſi; primo videlicet inveſtigando Lineam rectam, quæ Curvam tangat, deinde vero Lineam curvam ſimpliciorem, quæ cum Curva propoſita multo magis conveniat, eamque non ſolum tangat, ſed quaſi oſculetur. Vocari autem ejuſmodi Linearum curvarum arctiſſimus contactus ſolet Osculatio.

Tab. XV. Fig. 55. 305. Sit igitur propoſita æquatio quæcunque inter Coordinatas orthogonales x & y, atque ad naturam minimæ Curvæ portionis Mm circa punctum M verſantis indagandam, cum inventa ſit Abſciſſa $AP = p$ & Applicata $PM = q$, ponatur in Axe MR Abſciſſa minima $Mq = t$, & Applicata $qm = u$; eritque $x = p + t$, & $y = q + u$; quibus valoribus in æquatione ſubſtitutis, perveniatur ad hanc æquationem

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + \&c.,$$

quæ exprimet naturam Curvæ ejuſdem ad Axem MR relatæ. Quoniam autem has novas Coordinatas t & u minimas ſtatuimus, ſequentes termini quaſi infinities erunt minores quam antecedentes; ideoque præ his ſine errore rejici poterunt.

306. Niſi ergo ambo coëfficientes primi A & B evaneſcant, rejectis

rejectis sequentibus terminis omnibus, æquatio $0 = At + Bu$ ostendet Lineam rectam $M\mu$ quæ Curvam in puncto M tanget, hocque loco cum Curva communem habet directionem. Erit ergo $Mq : q\mu = B : -A$; unde, ob cognitas quantitates A & B, positio Tangentis $M\mu$ innotescit, quæ cum Curvam in puncto tantum M contingat, videamus quantum Curva Mm porro a recta $M\mu$ saltem per minimum spatium aberret. In hunc finem assumamus normalem MN pro Axe, in quem ex m Applicata orthogonalis mr ducatur, ac vocetur $Mr = r$; $rm = s$; erit $t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ & $u = \frac{-As - Br}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$, & $r = \frac{-At - Bu}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$, & $s = \frac{Bt - Au}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$. Quare, cum sit

$$-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^3 + Ft^3 + Gttu + \&c.,$$

erit r quantitas infinities minor, quam t & u, ac propterea erit quoque r quantitas infinities minor quam s; nam s per t & u, at r per ipsarum t & u quadrata vel potestates superiores determinatur.

307. Naturam ergo Curvæ Mm multo propius cognoscemus, si terminos quoque $Ct^2 + Dtu + Eu^2$ in computum ducamus, atque sequentes tantum negligamus; sicque habebimus inter t & u hanc æquationem $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2$, in qua si loco t & u valores superiores substituamus, habebimus $r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \frac{(A^2C + ABD + B^2E)rr}{A^2 + B^2} + \frac{(A^2D - B^2D - 2ABC + 2ABE)rs}{A^2 + B^2} + \frac{(A^2E - ABD + B^2C)ss}{A^2 + B^2}$.
At, quia r infinities minor est quam s, termini rr & rs præ termino ss evanescent, fietque $ss = \frac{(A^2 + B^2 r\sqrt{(A^2 + B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}$, quæ æquatio exprimit naturam Curvæ Curvam propositam in M osculantis.

308. Curvæ ergo Arcus minimus Mm congruet cum Vertice Parabolæ super Axe MN descriptæ, cujus Latus rectum

seu

CAP. XIV.

LIB. II. seu Parameter est $= \frac{(A^2+B^2)\sqrt{(A^2+B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}$: unde qualis est curvatura hujus Parabolæ in vertice talis erit Curvæ propositæ curvatura in puncto M. Cum autem nullius Curvæ curvatura distinctius cognoscatur quam Circuli, quoniam ipsius curvatura ubique est eadem, eoque major existit, quo minor fuerit radius; commodius erit curvaturam Curvarum definire per Circulum æqualis curvaturæ, qui *Circulus osculator* vocari solet. Hanc ob rem oportebit Circulum definire cujus curvatura conveniat cum curvatura propositæ Parabolæ in ipsius Vertice, quo tum Circulum istum in locum Parabolæ osculantis substituere liceat.

309. Ad hoc efficiendum, contemplemur curvaturam Circuli tanquam incognitam, eamque modo exposito per curvaturam Parabolæ exprimamus, sic enim vicissim pro Parabola osculante Circulus osculator substitui poterit. Sit igitur Curva Mm proposita Circulus radio $= a$ descriptus, cujus natura exprimetur æquatione $yy = 2ax - xx$. Sumta ergo $AP = p$, & $PM = q$ erit, $qq = 2ap - pp$. Jam ponatur $x = p + t$ & $y = q + u$, atque orietur hæc æquatio $qq + 2qu + uu = 2ap + 2at - pp - 2pt - tt$, quæ, ob $qq = 2ap - pp$, reducitur ad hanc formam $0 = 2at - 2pt - 2qu - tt - uu$, quæ cum superiori forma comparata dat $A = 2a - 2p$; $B = -2q$; $C = -1$, $D = 0$, & $E = -1$, unde fit $AA + BB = 4(aa - 2ap + pp + qq) = 4aa$, & $(AA + BB)\sqrt{(AA + BB)} = 8a^3$ atque $AAE - ABD + BBC = -AA - BB = -4aa$. Unde Circulum, cujus radius $= a$, in quovis puncto osculatur Parabolæ vertex, cujus natura exprimitur æquatione $ss = 2ar$; ideoque vicissim quam Curvam osculatur Vertex Parabolæ $ss = br$, eandem osculabitur Circulus, cujus radius est $= \frac{1}{2}b$.

310. Cum igitur supra invenerimus Curvam Mm osculari Parabolam cujus æquatio sit $ss = \frac{(AA+BB)\sqrt{(A^2+B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C} r$, mani-

manifeſtum eſt ejuſdem Curvæ curvaturam in M convenire cum curvatura Circuli, cujus radius ſit $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$. Hæc ergo expreſſio dat radium Circuli oſculatoris, atque iſte radius quoque vocari ſolet *Radius oſculi*; ſæpe etiam *radius curvedinis* ſeu *curvaturæ* appellatur. Ex æquatione ergo inter t & u, quam ex æquatione inter x & y propoſita elicuimus, ſtatim definiri poteſt radius oſculi Curvæ in puncto M, ſeu radius Circuli oſculantis Curvam in M. In æquatione enim inter t & u rejiciantur termini, in quibus t & u plures duabus dimenſiones obtinent, atque ex æquatione, quæ erit hujus formæ

CAP. XIV.

$$0 = At + Bu + Ctt + Dtu + Euu,$$

invenietur radius oſculi $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$.

311. Quoniam vero ſignum radicale $\sqrt{(A^2 + B^2)}$ ambiguitatem ſigni involvit, incertum eſt utrum iſta expreſſio ſit affirmativa an negativa, ſcilicet utrum concavitas Curvæ punctum N reſpiciat, an convexitas. Ad hoc dubium tollendum quæri debet utrum Curvæ punctum m intra Tangentem $M\mu$ verſus Axem AN ſit poſitum, an vero extra Tangentem cadat. Priori caſu Curva verſus N erit concava, atque Centrum Circuli oſculantis in rectæ MN portionem verſus Axem protenſam incidet; poſteriori caſu vero in portionem rectæ NM ultra M productam. Omnis ergo dubitatio evaneſcet ſi inquiratur, utrum qm ſit minor quam $q\mu$, an major; priori enim caſu Curva verſus N erit concava, poſteriori vero convexa.

312. Eſt vero $q\mu = \frac{-At}{B}$, & $qm = u$, quare videndum eſt utrum ſit $\frac{-At}{B}$, major minorve quam u. Quia igitur $m\mu$ eſt Lineola quam minima, ponatur $m\mu = w$, erit-

LIB. II. que $u = \frac{-At}{B} - w$; unde, facta substitutione, fit $o =$
$-Bw + Ctt - \frac{ADtt}{B} - Dtw + \frac{A^2Ett}{BB} + \frac{2AEtw}{B} + Ew^2$;
ubi, ob w præ t minimum, termini tw & w^2 evanescunt. Hinc fit $w = \frac{(B^2C - ABD + A^2E)tt}{B^3}$. Quod si ergo w fuerit quantitas affirmativa, quod evenit si $\frac{B^2C - ABD + A^2E}{B^3}$, seu $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ fuerit quantitas affirmativa, tum Curva erit concava versus N; sin autem $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ fuerit quantitas negativa, Curvæ convexitas punctum N respiciet.

TAB. XV. Fig. 57. 313. Quo hæc clariora reddantur, diversi casus qui occurrere possunt, seorsim sunt evolvendi. Sit igitur primum $B = o$, quo casu ipsa Applicata PM erit Tangens Curvæ Mm, & radius osculi erit $= \frac{A}{2E}$. Utrum autem Curva sit concava versus R, uti Figura præsentat, an convexa, ex æquatione $o = At + Ctt + Dtu + Euu$ intelligitur. Cum enim sit $Mq = t$ & $qm = u$, ob t infinities minus quam u, termini tt & tu præ uu evanescent, eritque $At + Euu = o$; ex qua æquatione intelligitur, si coëfficientes A & E habeant contraria signa, seu si $\frac{E}{A}$ fuerit quantitas negativa, tum Curvam fore concavam versus R. At, si coëfficientes A & E habeant paria signa, & $\frac{E}{A}$ fuerit quantitas affirmativa, tum Curva ad alteram Tangentis partem erit sita; Abscissa enim Mq statui debet negativa quo Applicata qm respondeat realis.

TAB. XV. Fig. 55. 314. Sit nunc Tangens $M\mu$ inclinata ad Axem AP seu ipsi parallelam, ita ut angulus $RM\mu$ sit acutus, & normalis MN Axem in N ultra P secet: quo casu Abscissis t respondebunt Applicatæ u affirmativæ; unde coëfficientes A & B signa

signa habebunt disparia, & fractio $\frac{A}{B}$ erit negativa. De hoc casu jam ante vidimus Curvam fore concavam versus N, si fuerit $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ quantitas affirmativa; vel, cum $\frac{B}{A}$ sit quantitas negativa, si fuerit $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{A}$ quantitas negativa. Sin autem fuerit $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ quantitas negativa, seu $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{A}$ quantitas affirmativa, tum Curva versus N convexitatem obvertet. Utroque vero casu radius osculi erit $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$. CAP. XIV.

315. Sit nunc $A = 0$, quo casu recta MR Axi parallela simul erit Curvæ Tangens, & u infinities minor quam t; unde erit $0 = Bu + Ctt$. Quare, si B & C habeant æqualia signa, seu si BC fuerit quantitas affirmativa, tum u habere debet valorem negativum; ideoque Curva erit concava versus punctum P, in quod N incidit, quod ipsum regula superior, facto $A = 0$, ostendit; radius osculi vero erit $= \frac{B}{2C}$. Hæc autem eadem regula, quæ supra est data, valet, si Tangens MT ultra P cum Axe concurrat; tum enim pariter Curva versus N erit vel concava vel convexa, prout hæc expressio $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$, fuerit vel affirmativa vel negativa, eritque radius osculi ut ante $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$. TAB. XV. Fig. 58. TAB. XV. Fig. 59.

316. Sit proposita Ellipsis, seu saltem ejus quadrans DMC, cujus Centrum A, alter semiaxis transversus $AD = a$, alter semiaxis conjugatus $AC = b$. Sumtis ergo Abscissis x in Axe AD a Centro A, habebibur hæc æquatio pro Ellipsi $aayy + bbxx = aabb$. Sumta jam quapiam Abscissa $AP = p$, & posita Applicata $PM = q$, erit $aaqq + bbpp = aabb$. Ponatur jam $x = p + t$, & $y = q + u$, erit $aaqq + 2aaqu +$ TAB. XV. Fig. 60.

LIB. II. $aauu + bbpp + 2bbpt + bbtt = aabb$, seu $2bbpt + 2aaqu + bbtt + aauu = 0$. Primum ergo, ob coëfficientes ipsarum t & u, normalis MN citra P cum Axe concurrit: eritque $PM : PN = B : A = aaq : bbp$ & $PN = \frac{bbp}{aa}$, ob $A = 2bbp$ & $B = aaq$. Præterea vero, ob $C = bb$, $D = 0$ & $E = aa$, erit $\frac{AAE - ABD + B^2C}{B} = \frac{4aabb(aaqq + bbpp)}{2aaq} = \frac{4a^4b^4}{2aaq}$; ideoque quantitas affirmativa, qua indicatur Curvam versus N esse concavam.

317. Ad ipsum jam radium osculi inveniendum, est $A^2 + B^2 = 4(a^4qq + b^4pp)$, & $A^2E - ABD + B^2C = 4a^4b^4$; unde radius osculi erit $= \frac{(a^4qq + b^4pp)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$. At est $MN = \surd(qq + \frac{b^4pp}{a^4})$, unde $\surd(a^4qq + b^4pp) = aa.MN$, ideoque radius osculi $= \frac{a^2.MN^3}{b^4}$. Si in normalem MN productam ex Centro A ducatur perpendiculum AO, erit, ob $AN = p - \frac{bbp}{aa}$ & triangula MNP & ANO similia, $NO = \frac{aabbpp - b^4pp}{a^4.MN}$ & $MO = NO + MN = \frac{aaqq + bbpp}{aa.MN} = \frac{bb}{MN}$; unde $MN = \frac{bb}{MO}$, hincque radius osculi $= \frac{aabb}{MO^3}$, quæ expressio ad utrumque Axem AD & AC æque est accommodata.

318. Invento autem pro quovis Curvæ loco radio osculi, natura Curvæ satis clare perspicitur. Si enim portio Curvæ in partes plurimas quam minimas dividatur, unaquæque particula haberi potest pro Arculo Circuli, cujus radius erit ipse radius osculi in eo loco. Hinc vero etiam descriptio Curvæ per plurima puncta multo accuratius absolvetur. Postquam enim

enim plura notata fuerint puncta, per quæ Curva transeat, si pro his singulis punctis primo quærantur Tangentes, hincque porro normales, atque tum radii osculi, portiunculæ Curvæ intra puncta inventa sitæ ope circini poterunt describi. Hocque modo eo accuratius vera Curvæ figura exprimetur, quo propiora fuerint puncta primum notata. CAP. XIV.

319. Quoniam igitur portiuncula Curvæ ad M cum Arculo Circuli radio osculi descripti congruit, non solum elementum Mm, sed etiam præcedens Mn eadem curvatura erit præditum. Cum enim natura minimæ Curvæ portionis Mm exprimatur hujusmodi æquatione, $ss = \alpha r$ inter Coordinatas $Mr = r$ & $rm = s$, unicuique Abscissæ minimæ $Mr = r$, ex æquatione duplex respondebit Applicata s altera affirmativa, altera negativa: ideoque Curva versus n æque ac versus m continuabitur. Ubicunque ergo radius osculi, qui est $= \frac{1}{2}\alpha$, finitam habet magnitudinem, ibi curvatura utrinque saltem per minimum spatiolum erit uniformis. Neque ergo his casibus Curva ex M subito, formata Cuspide, reflectetur, neque mutata curvatura, portio Mn convexitatem versus N obvertere poterit, dum altera Mm est concava versus N; cujusmodi curvaturæ immutatio vocari solet INFLEXIO, vel *punctum* FLEXUS CONTRARII: Quare, ubi radius osculi est finitus, ibi neque Cuspis, neque punctum flexus contrarii locum habere potest. TAB. XV. Fig. 55.

320. Cum igitur ex æquatione inter t & u

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Euu + Ft^3 + Gttu + Htu^2 + \&c.,$$

inventus sit radius osculi $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$, manifestum est, si fuerit $A^2E - ABD + B^2C = 0$, tum radium osculi fieri infinite magnum, ideoque Circulum osculantem in Lineam rectam abire. Ubi ergo hoc evenit, ibi Linea curva curvatura destituitur, atque duo Curvæ elementa quasi in

LIB. II. directum erunt ſita. Quo igitur his caſibus natura Curvæ penitius perſpiciatur, ſubſtitutio $t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(AA+BB)}}$ & $u = \frac{-As - Br}{\sqrt{(AA+BB)}}$, etiam in terminis $Ft^3 + Gttu + Htuu + Iu^3$ eſt inſtituenda. Cum autem præ termino primo $r\sqrt{(A^2+B^2)}$ omnes termini ſequentes, qui r continent, evaneſcant, his terminis rejectis, atque ſubſtitutione per totam æquationem facta, obtinebitur ejuſmodi æquatio

$$r\sqrt{(A^2+B^2)} = \alpha ss + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \&c.$$

321. Ex hac æquatione jam ſtatim colligitur, ut ſupra, radius oſculi $= \frac{\sqrt{(AA+BB)}}{2\alpha}$; ſin autem ſit $\alpha = 0$, quo caſu radius oſculi fit infinitus, ad Curvæ naturam exactius cognoſcendam, ſumi debet terminus ſequens βs^3, ita ut ſit $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \beta s^3$ niſi enim ſit $\beta = 0$, termini ſequentes γs^4, δs^5, &c., omnes præ hoc evaneſcunt. Curvam ergo hoc caſu in M oſculabitur Curva hac æquatione $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \beta s^3$ expreſſa, ex qua ſimul figura Curvæ circa punctum M cognoſcetur. Cum igitur Abſciſſæ r negative ſumtæ negativus valor Applicatæ s reſpondeat, Curva circa M figuram habebit anguineam $mM\mu$, ideoque in M habebit punctum flexus contrarii.

TAB. XVI. Fig. 61.

322. Quod, ſi præter α etiam fiat $\beta = 0$, tum natura Curvæ circa M exprimetur hac æquatione $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \gamma s^4$, ex qua cum unicuique Abſciſſæ r duplex Applicata s reſpondeat, altera affirmativa, altera negativa, neque Abſciſſa r utrinque ſumi queat, utraque Curvæ portio Mm & $M\mu$ ad eandem Tangentis partem erit poſita. At ſi, ob $\alpha, \beta,$ & γ evaneſcentes, natura Curvæ circa M exprimatur æquatione $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \delta s^5$, tum Curva ad M iterum habebit punctum flexus contrarii uti in *Figura* 61. Sin autem fuerit etiam $\delta = 0$, ut fiat $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \varepsilon s^6$, tum Curva iterum

TAB. XVI. Fig. 62.

TAB. XVI.

iterum puncto flexus contrarii destituetur, uti *Figura 62*. Atque generaliter, si exponens ipsius s fuerit numerus impar, Curva in M habebit punctum flexus contrarii; sin autem exponens ipsius s fuerit numerus par, Curva carebit puncto flexus contrarii uti *Figura 62*. CAP. XIV. TAB. XVI.

323. Hæc igitur sunt Curvarum phænomena, si punctum M fuerit simplex, seu si in æquatione

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + \&c.,$$

non uterque coëfficiens A & B simul evanescat. Quod si autem fuerit & $A = 0$, & $B = 0$, Curvaque habuerit duos pluresve ramos se in puncto M intersecantes, uniuscujusque rami curvatura & indoles in M investigabitur seorsim, ut ante. Sit enim pro Tangente cujusvis rami $mt + nu = 0$, & quæratur æquatio pro hoc ramo inter Coordinatas r & s, quarum illa r in normali MN capiatur, ut sit r infinities minor quam s. Poni ergo debebit $t = \frac{-mr + ns}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$ & $u = \frac{-ms - nr}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$; TAB. XV. Fig. 56. TAB. XV. Fig. 55.

quo facto & neglectis terminis ob infinitam parvitatem præ reliquis evanescentibus, prodibit, si M fuerit punctum duplex, hujusmodi æquatio $rs = \alpha s^3 + \beta s^4 + \gamma s^5 + \delta s^6 + \&c.$: sin autem M fuerit punctum triplex, talis $rss = \alpha s^4 + \beta s^5 + \gamma s^6 + \&c.$, & ita porro: quæ æquationes omnes reducuntur ad hanc formam

$$r = \alpha ss + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \&c.$$

324. Ex hac æquatione intelligitur istius Curvæ rami, quem consideramus, in M esse radium osculi $= \frac{1}{2\alpha}$, qui, si $\alpha = 0$, fiet $= \infty$. Hoc ergo casu natura Curvæ exprimetur vel hac æquatione $r = \beta s^3$, vel $r = \gamma s^4$, vel $r = \delta s^5$, &c.; ex quibus, ut ante, colligetur Curvæ ramum in M vel punctum flexus contrarii habere, vel tali carere. Prius scilicet evenit, si exponens ipsius s fuerit numerus impar, posterius si sit numerus

LIB. II. rus par. Hoc ergo modo judicandum erit de quovis ramo per punctum M transeunte seorsim, cum reperta fuerit ejus Tangens, ejusque Tangens discrepet a Tangentibus reliquorum ramorum sese in eodem puncto M intersecantium.

325. Aliud autem judicium erit ferendum, si duorum pluriumve ramorum Tangentes in puncto M coincidant. Sint enim, evanescentibus A & B in æquatione $0 = Ctt + Dtu + Euu + Ft^3 + Gt^2u +$ &c., primi membri $Ctt + Dtu + Euu$, ambo Factores simplices æquales, seu ambo rami se in puncto
TAB. XV. Fig. 55. M decussantes communem habeant Tangentem. Sit ergo $Ctt + Dtu + Euu = (mt + nu)^2$, atque æquatione ad Coordinatas $Mr = r$, & $rm = s$ translata, ponendo $t = \frac{-mr + ns}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$ & $u = \frac{-ms - nr}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$; hujusmodi prodibit æquatio $rr = \alpha rss + \beta s^3 + \gamma rs^3 + \delta s^4 + \varepsilon rs^4 + \zeta s^5 +$ &c.: termini enim, in quibus r habet duas pluresve dimensiones præ primo rr evanescunt.

326. Hic primum spectandus est terminus βs^3, qui si adfuerit, præ eo reliqui omnes evanescunt, propterea quod r infinities minus est quam s. Nisi ergo fuerit $\beta = 0$, natura Curvæ circa M exprimetur hac æquatione $rr = \beta s^3$; ex qua, cum sit $r = s\sqrt{\beta s} = ss\sqrt{\frac{\beta}{s}}$, intelligitur radium osculi in M esse $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\beta}}$; seu, ob s evanescens in M, radium osculi quoque fieri $= 0$. Erit ergo curvatura in M infinite magna seu Elementum Curvæ in M erit portio Circuli infi-
TAB. XVI. Fig. 63. nite parvi. Quoniam porro Applicata s eundem obtinet valorem, sive Abscissa r sumatur affirmativa sive negativa, patet Curvam in M habere Cuspidem, atque in duos ramos Mm, $M\mu$ divaricari se mutuo in M contingentes atque Tangenti Mt convexitatem obvertentes.

327. Sit $\beta = 0$; adsit autem terminus δs^4, præ quo γrs^3 evanescit, atque natura Curvæ circa M exprimetur æquatione $rr = \alpha rss + \delta s^4$; quæ, si fuerit $\alpha\alpha$ minor quam -4δ, ob Factores

ctores imaginarios, punctum conjugatum in M indicat; ſin autem $\alpha\alpha$ major quam -4δ, tum in duas æquationes hujuſmodi $r = fss$ & $r = gss$ diſpeſcitur. Quare in M duo Curvæ rami ſe mutuo contingent, quorum alterius in M radius oſculi eſt $= \frac{1}{2f}$, alterius $= \frac{1}{2g}$. Si ergo hi duo rami cóncavitatem in eandem plagam vertant, figura erit duorum Arcuum circularium ſe intus Tangentium; ſin autem concavitates in plagas opoſitas dirigantur, figura erit duorum Arcuum circularium ſe extus Tangentium. CAP. XIV. TAB. XVI. *Fig.* 64. *Fig.* 65.

328. Sin etiam δ evaneſcat, tum æquatio vel in duas æquationes erit reſolubilis, vel ſecus, priori caſu duo oriuntur rami ſe in puncto M tangentes, quorum utriuſque natura exprimetur hujuſmodi æquatione $r = \alpha s^m$; prodibunt ergo tot diverſæ figuræ, quot dantur combinationes binorum ramorum, qui in M punctum ſimplex conſtituunt, quos vocemus *ramos primi ordinis*, qui omnes in æquatione $r = \alpha s^m$, continentur. Poſteriori autem caſu quo æquatio in duas alias ſe reſolvi non patitur, natura Curvæ exprimetur æquatione vel $rr = \alpha s^5$, vel $rr = \alpha s^7$, vel $rr = \alpha s^9$, &c.; quos ramos cum eo, quem ſupra invenimus $rr = \alpha s^3$, *ramos ſecundi ordinis* appellabimus, quia vicem tenent duorum ramorum primi ordinis ſe in M tangentium. Hi autem rami ſecundi ordinis omnes in M habebunt Cuſpidem, uti præbuit æquatio $rr = \alpha s^3$; hoc tamen diſcrimine, quod, cum radius oſculi in M pro æquatione $rr = \alpha s^3$ eſſet infinite parvus, idem pro reliquis æquationibus prodeat infinite magnus. Cum enim ex æquatione $rr = \alpha s^5$ ſit $r = ss\sqrt{\alpha s}$, erit radius oſculi in $M = \frac{1}{2\sqrt{\alpha s}}$, hoc eſt, ob $s = 0$, infinitus. TAB. XVI. *Fig.* 63.

329. Si tres Tangentes ramorum ſe in M decuſſantium in ſe invicem incidant; tum vel tres rami primi ordinis ſe in eodem puncto M contingent, vel in M erit contactus unius

LIB. II. rami ſecundi ordinis cum uno ramo primi ordinis, vel unicus per M tranſibit *ramus tertii ordinis.* Ramorum autem tertii ordinis natura exprimetur hujuſmodi æquationibus $r^3 = \alpha s^4$; $r^3 = \alpha s^5$; $r^3 = \alpha s^7$; $r^3 = \alpha s^8$; &c., ſeu hac generali $r^3 = \alpha s^n$, exiſtente n numero quocunque integro ternario majore neque per ternarium diviſibili. Horum ramorum autem figura ita erit comparata, ut in M ſit punctum flexus contrarii, ſi n fuerit numerus impar; flexus vero non contrarius ſeu continuus (ut in *Figura* 62.) adſit, ſi n fuerit numerus par. Ceterum in his Curvis radius oſculi in M erit infinite parvus ſi n minor quam 6, at infinite magnus ſit n major quam 6.

TAB. XVI.

330. Simili modo ſi quatuor Tangentes ramorum ſe in M decuſſantium congruant, tum vel quatuor rami primi ordinis, vel duo primi & unus ſecundi, vel duo rami ſecundi ordinis, vel unus primi & unus tertii ordinis ſe in eodem puncto M contingent, vel denique unicus *ramus quarti ordinis* per M tranſibit. Ramorum autem quarti ordinis natura continetur hac æquatione generali $r^4 = \alpha s^n$, exiſtente n numero integro impari majore quam 4. Hæ autem æquationes omnes præbent Cuſpidem, uti rami ſecundi ordinis. At in M erit radius oſculi infinite parvus ſi n minor quam 8, infinite magnus autem ſi n major quam 8.

TAB. XVI. *Fig.* 63.

331. Eodem modo ramorum *quinti* ſuperiorumve ordinum natura evolvetur; ratione figuræ autem rami quinti, ſeptimi, noni, omniumque imparium ordinum conveniunt cum ramis primi ordinis, quorum duplex eſt figura, vel cum puncto flexus contrarii, vel ſine eo. Rami autem ſexti, octavi, & omnium parium ordinum conveniunt ratione figuræ cum ramis ſecundi & quarti ordinis, omnes ſcilicet habebunt Cuſpidem in M uti *Figura* 63. exhibet. Quod autem ad radium oſculi attinet, quoniam horum Arcuum natura exprimitur hac æquatione $r^m = \alpha s^n$, exiſtente n numero majore quam m; perſpicuum

ſpicuum eſt, ſi fuerit n minor quam $2m$, radium oſculi fore infinite parvum; contra vero, ſi n major quam $2m$, infinite magnum. Cap. XIV.

332. Phænomena ergo, quæ in omni Curva conſpectui ſe offerunt, ad tria genera reducuntur. Primo ſcilicet Curva *continua curvatura* progreditur, neque uſquam punctum flexus contrarii habet, neque Cuſpidem ſeu punctum reflexionis. Evenit hoc primum ſi radius oſculi ubique fuerit finitæ magnitudinis, tum vero etiam dantur caſus quibus radii oſculi magnitudo ſive infinite magna ſive infinite parva continuum tractum non perturbat, quod uſu venit ſi natura Curvæ circa punctum M exprimitur æquatione $\alpha r^{m} = s^{n}$, exiſtente m numero impari, at n numero pari majori quam m. Secundum phænomenon eſt *punctum Flexus contrarii*, quod locum habere nequit niſi radius oſculi fuerit vel infinite magnus vel infinite parvus; indicatur autem æquatione $\alpha r^{m} = s^{n}$, ſi uterque exponens m & n fuerit numerus impar, exiſtente ſemper n majore quam m Erit enim radius oſculi infinite magnus ſi n major quam $2m$, at infinite parvus ſi n minor quam $2m$. Tertium phænomenon eſt *punctum Reflexionis* ſeu *Cuſpis*, ubi duo quaſi rami verſus ſe invicem convexi in puncto coeuntes ſe tangunt atque terminantur; tale punctum monſtrat æquatio $\alpha r^{m} = s^{n}$, ſi m fuerit numerus par & n impar. In Cuſpide ergo radius oſculi ſemper eſt vel infinite parvus vel infinite magnus.

333. Quoniam igitur in his tribus generibus omnes Curvarum, ratione tractus continui, varietates continentur, primum intelligitur Curvæ continuæ ramum nunquam ita inflexum dari, ut in C angulum finitum ACB conſtituat. Deinde, cum in puncto reflexionis ambo rami ſibi convexitatem obvertant, ejusmodi punctum reflexionis ACB in C non datur, ubi rami AC & BC in C quidem communem Tagentem habeant, at alterius concavitas alterius convexitatem reſpiciat; & quoties Tab. XVI. Fig. 66. Tab. XVI. Fig. 67.

 hujuſ-

LIB. II. hujusmodi reflexio adesse videatur, toties Curva non est completa; &, si Curva ad normam æquationis compleatur ac secundum omnes partes exprimatur, orietur figura, qualis in

TAB. XVI. *Figura 64.* exhibetur. Dantur quidem Curvarum describendarum modi, quibus ejusmodi Cuspis ACB oritur, quæ propterea ab HOSPITALIO *Cuspis secundæ speciei* vocatur. Verum notandum est descriptiones mechanicas non semper totam Curvam, quæ quidem æquatione contineatur, producere, sed sæpenumero certam tantum partem exhibere, qua sola notatione lis, quæ circa hanc Cuspidem secundæ speciei est mota, dirimitur.

Non obstantibus his argumentis, quibus existentia hujusmodi Cuspidis secundæ speciei everti videtur, innumerabiles dantur Curvæ algebraïcæ tali Cuspide præditæ. Inter quas adeo una ex ordine Linearum quarto, hac æquatione contenta $y^4 - 2y^2x - 4yxx - x^3 = 0$, quæ ex ista formula $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ resultat. Quanquam enim hic primum occurrit terminus $\sqrt{x}$, tamen ejus signum non est ambiguum, sed necessario debet esse $+$. Nam, si ipsi tribueretur signum negationis, alter terminus $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt{(x\sqrt{x})}$ evaderet imaginarius. Ex quo exemplo quemadmodum exempla supra allata restringi oporteat luculenter perspicitur.

TAB. XVI. Fig. 64. 334. Si duo rami, qui in M communem habent Tangentem, ideoque quatuor Arcus ex M exeuntes repræsentant nempe Mm, $M\mu$, Mn, $M\nu$, diversis æquationibus exprimantur, dubium est nullum, quinam horum Arcuum sint continui; ii scilicet, qui sub eadem æquatione continentur; eritque Arcus Mm continuatio Arcus Mn, & $M\mu$, continuatio Arcus νM. Quod si vero ambo rami illi eadem æquatione exprimantur, tum ob cessantem rationem priorem, Arcus Mm æque haberi potest pro continuatione Arcus νM, atque Arcus $n M$. Cum autem uterque Arcus Mn & $M\nu$ æque haberi possit pro continuatione Arcus Mm, etiam alter pro alterius continuatione haberi poterit. Hinc Arcus mM,

&

& $M\mu$ Curvam continuam conſtituere cenſendi ſunt, æque ac bini Arcus quicunque alii, ſicque hoc caſu in M ſe reſpicient duæ Cuſpides ſecundæ ſpeciei, $mM\mu$ & $nN\nu$.

335. Neque vero ſolum valet de duobus ramis qui ſine Flexu contrario ac ſine Cuſpide ſe mutuo in M tangunt atque eadem æquatione exprimuntur, ſed etiam eadem erit continuitatis ratio, cujuſcunque generis fuerint ambo illi rami ſe mutuo in M tangentes, dummodo communi æquatione exprimantur. Evenit hoc quoties inter r & s ad hujuſmodi pervenitur æquationem $\alpha^2 r^{2m} - 2\alpha\beta r^m s^n + \beta\beta s^{2n} = 0$; tum enim uterque ramus eadem æquatione $\alpha r^m = \beta s^n$ exprimetur. Hoc igitur caſu quatuor Arcuum ex puncto M exeuntium duo quicunque pro una Linea continua haberi poſſunt, hincque naſcentur innumerabiles Cuſpides ſecundæ ſpeciei. Hæc autem ipſa continuitatis ratio in cauſa eſt, quod quædam deſcriptiones ac conſtructiones mechanicæ nonnumquam Cuſpides ſecundæ ſpeciei producant; hoc tamen evenire non poteſt, niſi quando deſcriptio non totam Curvam in æquatione contentam, ſed ejus tantum ramum unum vel aliquot exhibet.

CAPUT XV.

De Curvis una pluribuſve Diametris præditis.

336. DE Lineis ſecundi ordinis ſupra vidimus, eas omnes unam ad minimum habere Diametrum orthogonalem, quæ totam Curvam in duas partes ſimiles & æquales ſecet. Parabola ſcilicet ejuſmodi unam habet Diametrum; ac propterea duabus conſtat partibus æqualibus & ſimilibus. Ellipſis autem atque Hyperbola duas ejuſmodi habent Diametros ſe mutuo in Centro normaliter decuſſantes; ideoque in iis quatuor dantur Arcus ſeu rami inter ſe æquales & ſimiles.

LIB. II. Circulus vero, quia ab omni recta per Centrum ducta in duas partes similes & æquales dividitur, innumeras habebit partes æquales, omnes scilicet Arcus, qui æqualibus chordis subtenduntur, simul inter se sunt æquales & similes.

337. Hanc igitur duarum pluriumve partium ejusdem Curvæ similitudinem hic data opera perpendemus; easque Curvas, quarum duæ pluresve partes inter se sunt similes, ad æquationes generales revocabimus. Ac primo quidem, si

TAB. XVII. Fig. 68.

consideremus æquationem inter Coordinatas orthogonales x & y, diviso universo spatio in quatuor regiones litteris Q, R, S, T indicatas per rectas AB, EF, se mutuo in C normaliter secantes, sumtis x & y affirmativis, portio Curvæ in regione Q sita oritur; sumta autem Abscissa x affirmativa, at Applicata y negativa, portio Curvæ in regione R sita oritur: sin autem x negativa ponatur, manente y affirmativa, portio Curvæ in regione S sita prodibit; portio denique in regione T sita invenitur, posita utraque Coordinata y & x negativa.

338. Portiones ergo in regionibus Q & R sitæ inter se erunt æquales & similes, si æquatio ita fuerit comparata, ut non mutetur etiamsi $-y$ loco y scribatur. Cum igitur omnis potestas parium exponentium ipsius y hac gaudeat proprietate; patet, si in æquatione pro Curva nullæ potestates impares ipsius y occurrant, Curvæ portiones in regionibus Q & R sitas inter se fore æquales & similes; ideoque rectam AB in qua Abscissæ $CP = x$ capiuntur, fore Curvæ Diametrum. Hujusmodi ergo Curvæ, si quidem fuerint algebraïcæ, omnes in hac æquatione generali continebuntur

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma xx + \delta yy + \epsilon x^3 + \zeta xyy + \eta x^4 + \theta x^2 y^2 + \iota y^4 \text{ \&c.}$$

quæ expressio ita describi potest ut sit Functio rationalis ipsarum x & yy. Quod si ergo Z fuerit Functio quæcunque rationalis ipsarum x & yy, tum æquatio $Z = 0$, exprimet Lineam curvam, quæ a recta AB in duas partes similes & æquales

æquales bisecabitur; erunt ergo quoque portiones in regionibus S & T sitæ inter se æquales & similes. CAP. XV.

339. Portiones vero in regionibus Q & S erunt æquales & similes, si æquatio ita fuerit comparata, ut posito $-x$ loco x non immutetur: quare, si Z fuerit Functio quæcunque rationalis ipsarum xx & y, tum æquatio $Z = 0$, exprimet Curvam, quæ per rectam EF in duas partes similes & æquales bisecabitur. Æquatio ergo pro his Curvis erit hujusmodi

$$0 = \alpha + \beta y + \gamma xx + \delta yy + \varepsilon xxy + \zeta y^3 + \eta x^4 + \theta xxyy + \iota y^4 + \&c.$$

Per hanc ergo æquationem portio Curvæ in S sita similis & æqualis erit portioni in Q, similique modo portio in T portioni in R.

340. Portiones autem in regionibus oppositis Q & T, seu R & S erunt similes & æquales, si æquatio inter Coordinatas x & y ita fuerit comparata, ut, posita utraque x & y negativa, nullam mutationem subeat. Sit $Z = 0$ æquatio pro his Curvis, ac primo patet, si Z fuerit Functio ipsarum x & y, parium dimensionum, seu, si fuerit aggregatum ex quotcunque Functionibus homogeneis parium dimensionum, tum æquationem $Z = 0$ præscripta gaudere proprietate. Tum vero si Z fuerit aggregatum quotcunque Functionum homogenearum imparium dimensionum, sumtis x & y negativis, Z abibit in $-Z$; ideoque, cum esset $Z = 0$, erit quoque $-Z = 0$. Hinc ergo duplex nascitur æquatio generalis pro Curvis, quæ in regionibus oppositis Q & T itemque in R & S portiones habent æquales & similes, altera scilicet erit

$$0 = \alpha + \beta xx + \gamma xy + \delta y^2 + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta xxyy + \theta xy^3 + \iota y^4 + \kappa x^6 + \&c.$$

altera vero erit

$$0 = \alpha x + \beta y + \gamma x^3 + \delta x^2 y + \varepsilon xy^2 + \zeta y^3 + \eta x^5 + \theta x^4 y + \iota x^3 y^2 + \&c.$$

341. Curvæ ergo, quæ duas habent partes similes & æquales, duplicis sunt generis: vel enim hæ duæ partes utrinque circa Lineam rectam ita sunt dispositæ, ut omnes Ordinatæ ortho-

LIB. II. orthogonales ad illam rectam ſimul bifariam ſecentur, quo caſu illa recta *Diameter* Curvæ *orthogonalis* appellatur, quorſum pertinent æquationes §. §. 337. & 338. traditæ. Vel binæ illæ partes ſimiles & æquales in regiones oppoſitas Q & R ſeu T & S cadunt, ita ut omnis recta per punctum C ducta Curvam divídat in duas partes alternatim æquales, cujuſmodi Curvæ continentur in æquationibus in paragrapho præcedente exhibitis. Hanc igitur partium æqualium diverſam poſitionem ita deſcribemus, ut eas, quæ ad priorem ſpeciem pertinent, *diametraliter æquales*; quæ vero ad poſteriorem, *alternatim æquales* appellemus. Quia vero in poſteriore ſpecie datur punctum C, per quod omnis recta utrinque ad Curvam producta ſimul biſecatur, hoc punctum *Centri* nomine appellari convenit, ita ut Curvæ binas partes alternatim æquales habentes Centro præditæ dicantur; illæ vero Curvæ, quæ duas partes diametraliter æquales habent, Diametro præditæ vocentur.

342. Cum æquatio $Z = 0$, præbeat Curvas, quarum Diameter eſt recta AB, ſi Coordinata y pares tantum obtineat dimenſiones in Functione Z; atque eadem æquatio $Z = 0$, rectam EF Curvæ Diametrum indicet, ſi altera Coordinata x ubique pares habeat exponentes, ſequitur, ſi Z ejuſmodi fuerit Functio ipſarum x & y ut omnes exponentes tam ipſius x quam ipſius y ſint numeri pares, tum utramque rectam AB & EF fore Curvæ Diametrum orthogonalem; ideoque quatuor partes in regionibus Q, R, S & T ſitas inter ſe fore æquales & ſimiles. Hujuſmodi ergo Curvæ omnes in hac generali æquatione continebuntur.

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma y^2 + \delta x^4 + \varepsilon x^2 y^2 + \zeta y^4 + \eta x^6 + \theta x^4 y^2 + \&c.$$

343. Curvæ ergo in hac æquatione contentæ duas habebunt Diametros orthogonales AB & EF ſe mutuo in C normaliter interſecantes. Pertinent ergo hæ Curvæ omnes ad Linearum ordines vel ſecundum, vel quartum, vel ſextum, &c., ita ut in nullo Linearum ordine impari ulla contineatur Linea curva duabus Diametris ſe mutuo normaliter interſecantibus

prædita.

prædita. Deinde, quia iſta æquatio quoque continetur in æquatione priori, §. *339.*, hæ Curvæ ſimul Centrum habebunt in puncto C, ita ut omnis recta per id utrinque ad Curvam producta, in eo ſimul bifariam ſecetur. Hujuſmodi igitur Curvas duplici Diametro gaudentes præbebit æquatio $Z = 0$, ſi quidem fuerit Z Functio quæcunque rationalis ipſarum xx & yy. CAP. XV.

344. Quia igitur hoc modo deducti ſumus ad Lineas curvas duabus Diametris præditas, inquiramus in æquationes pro Lineis curvis, quæ plures habeant Diametros. Ac primo quidem facile oſtendetur, ſi quæpiam Curva duas tantum habeat Diametros, eas inter ſe normales eſſe oportere, ita ut nulla Curva duabus Diametris tantum prædita detur, quæ non in æquatione modo inventa contineatur. Ponamus enim cujuſpiam Lineæ curvæ duas eſſe Diametros AB, & EF ſeſe in C non normaliter decuſſantes. Cum igitur EC ſit Diameter, Curva utrinque circa eam æqualiter erit comparata: quare, cum ejus pars citerior rectam AC pro Diametro habeat, etiam pars ulterior Diametrum habebit GC, in eodem puncto C cum EC angulum $GCE = ACE$ conſtituentem. Simili modo, cum GC ſit Diameter, debebit quoque recta IC, exiſtente $GCI = GCE$, eſſe Diameter ejuſdem indolis, cujus eſt EC. Porro Diameter quoque erit recta LC, ſumto angulo $ICL = ICG$; ſicque progrediendo, continuo novæ Diametri reperientur donec in primam AC recidant; quod evenit, ſi angulus ACE ad angulum rectum habeat rationem rationalem. TAB. XVII. *Fig. 69.*

345. Niſi ergo angulus ACE ad angulum rectum habeat rationem rationalem, numerus Diametrorum erit infinitus, quo caſu Curva erit Circulus; quippe in quo omnis recta per Centrum ducta eſt Diameter orthogonalis: hic enim Diametri nomen ad ſolas Diametros orthogonales reſtringimus, quia his ſolis Curvæ in duas partes ſimiles & æquales dividuntur. Ex his intelligitur nullam Curvam algebraïcam duas habere poſſe Diametros inter ſe parallelas: ob rationes enim allegatas, ſi duas haberent Diametros parallelas, ſimul infinitas inter

LIB. II. ſe parallelas & æqualiter diſtantes habere deberent; ideoque Linea recta hujuſmodi Curvam in infinitis punctis ſecare poſſet: quæ proprietas in Lineas curvas algebraïcas non cadit.

346. Quod ſi ergo quæpiam Linea curva plures habeat Diametros, eæ omnes ſe mutuo in eodem puncto C interſecabunt, atque a ſe invicem ſub æqualibus angulis diſtabunt. Erunt vero hæ Diametri duplicis generis alternatim progredientes; Diameter enim CG ejuſdem erit indolis, cujus eſt Diameter CA; atque æquatio pro Curva, ſumta Diametro CG pro Axe, conveniet cum æquatione pro Curva, ſumta Diametro CA pro Axe: Diametri ergo alternæ CA, CG, CL &c., æqualiter ad Curvam erunt affectæ, ſimilique modo Diametri CE, CI &c. eadem ratione ad Curvam pertinebunt. Quam ob rem, ſi numerus Diametrorum fuerit finitus, tum angulus ACG erit pars aliquota quatuor rectorum, ſeu angulus ACE erit pars aliquota anguli 180 graduum, ſeu ſemiperipheriæ, quam vocemus $= \pi$.

TAB. XVII. *Fig. 70.* 347. Si fuerit angulus $ACE = 90° = \frac{1}{2}\pi$, caſus exiſtit jam ſupra tractatus, quo Curva duas habet Diametros inter ſe normales. Hujuſmodi ergo Curvas denuo inveſtigemus, at methodo diverſa a priori, quæ æque ad inventionem plurium Diametrorum accommodari queat. Sit igitur Curva duabus Diametris AB, & EF prædita; ſumatur in ea quodcunque punctum M, &, ducta ex Centro C recta CM, ponatur $CM = z$, & angulus $ACM = s$; quæraturque æquatio inter z & s. Ac primo quidem intelligitur, quia recta AC eſt Diameter, z eſſe debere ejuſmodi Functionem ipſius s, quæ maneat eadem, etiamſi $-s$ loco s ponatur; ſumto enim angulo $ACM = s$ negativo ACm, recta Cm debet eſſe $= CM$. Verum $cof.s$ eſt ejuſmodi Functio ipſius s, quæ manet eadem poſito $-s$ loco $+s$, quam ob rem huic requiſito ſatisfiet ſi fuerit z Functio quæcunque rationalis ipſius $cof.\,s$.

348. Ponatur Abſciſſa $CP = x$, Applicata $PM = y$, erit

erit $z = \sqrt{(xx+yy)}$ & $cos.s = \frac{x}{z}$; ſitque $Z = 0$, æquatio pro Curva, cujus recta CA ſit Diameter; atque eſſe debebit Z Functio rationalis ipſarum z & $\frac{x}{z}$, vel ipſarum z & x, vel, ob rationalitatem, ipſarum $xx+yy$ & x. At ſi Z fuerit Functio ipſarum $xx+yy$ & x, erit quoque Functio ipſarum yy & x. Sit enim $xx+yy = u$; quia Z debet eſſe Functio ipſarum x & u, poſito $u = t+xx$, ut ſit $t = yy$, fiet Z Functio ipſarum t & x, hoc eſt ipſarum yy & x. Quoties ergo Z fuerit Functio rationalis ipſarum yy & x, toties recta CA Curvæ erit Diameter: quæ eſt eadem proprietas Curvarum una Diametro gaudentium, quam ſupra invenimus. Cap. XV.

349. At Curvam quæſitam duabus Diametris AB & EF præditam eſſe oportet; unde CB erit Diameter ejuſdem indolis, ac CA. Quare, ſi recta $CM = z$, ad Diametrum CB referatur, ob angulum $BCM = \pi - s$, neceſſe eſt ut z ejuſmodi ſit Functio ipſius s, quæ non varietur, etiamſi loco s ponatur $\pi - s$. Hujuſmodi Functio quidem foret $fin.s$, eſt $fin.s = fin.(\pi - s)$: ſed hoc modo præcedenti conditioni non ſatisfit. Hinc ejuſmodi expreſſio inveniri debet, quæ ad angulos s, $-s$, & $\pi - s$ æqualiter pertineat; talis eſt $cof.2s$, eſt enim $cof.2s = cof. -2s = cof.2(\pi - s)$. Quocirca æquatio $Z = 0$, erit pro Curva duabus Diametris AB & EF prædita, ſi Z fuerit Functio rationalis ipſarum z & $cof.2s$. Eſt vero $cof.2s = \frac{xx-yy}{zz}$. Ex quo Z debebit eſſe Functio ipſarum $xx+yy$, & $xx-yy$, vel ipſarum xx & yy, uti ſupra invenimus.

350. Progrediamur ad Curvas tribus Diametris AB, EF & GH præditas inveſtigandas; quæ Diametri in eodem puncto C ad angulos ACE, ECG, $GCB = 60° = \frac{1}{3}\varpi$ ſe mutuo ſecabunt, atque Diametri alternæ CA, CG, CF ejuſdem erunt indolis. Quare, ſi ponatur $CM = z$, & angu- Tab. XVII. Fig. 71.

 lus

LIB. II. lus $ACM = s$, ob $GCM = \frac{2}{3}\pi - s$, æquatio pro Curva $Z = 0$, ita debebit eſſe comparata, ut Z ſit Functio rationalis ipſius z, & quantitatis cujuſpiam w, quæ ab s ita pendeat, ut maneat eadem, ſive loco s ponatur $-s$, ſive $\frac{2}{3}\pi - s$. Erit ergo $w = cof.3s$; eſt enim $cof.3s = cof.-3s = cof.(2\pi - 3s)$. At, poſitis Coordinatis $CP = x$, $PM = y$, erit $cof.3s = \frac{x^3 - 3xyy}{z^3}$, ideoque Z eſſe debet Functio rationalis ipſarum $xx + yy$ & $x^3 - 3xyy$.

351. Quod ſi ergo ponatur $xx + yy = t$ & $x^3 - 3xyy = u$, hæc erit æquatio generalis pro Curvis tribus Diametris præditis

$$0 = \alpha + \beta t + \gamma u + \delta tt + \epsilon tu + \zeta uu + \eta t^3 + \&c.,$$

quæ præbet hanc inter x & y

$$0 = \alpha + \beta(xx + yy) + \gamma x(xx - 3yy) + \delta(xx + yy)^2 + \&c.$$

Cum igitur æquatio $0 = \alpha + \beta xx + \beta yy$ ſit pro Circulo, qui, habens infinitas Diametros, etiam quæſtioni de tribus Diametris ſatisfacit; ſimpliciſſima Curva tres habens Diametros erit Linea tertii ordinis hac æquatione expreſſa $x^3 - 3xyy = axx + ayy + b^3$, quæ tres habet Aſymtotas triangulum æquilaterum comprehendentes, in cujus medio exiſtit punctum C; & ſingulæ Aſymtotæ ſunt ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$. Pertinent ergo hæ Curvæ ad Speciem quintam ſecundum enumerationem a nobis ſupra factam.

TAB. XVIII. Fig. 72. 352. Si Curva habeat quatuor Diametros AB, EF, GH & IK ſe mutuo in puncto C ad angulos ſemirectos $= \frac{1}{4}\varpi$ interſecantes, tum Diametri CA, CG, CB, & CH ejuſdem erunt naturæ. Quare, poſita $CM = z$, & angulo $ACM = s$, quæri debet Functio quædam ipſius s, quæ non mutetur

mutetur sive loco s ponatur $-s$ sive $\frac{2}{4}\pi - s$. Talis autem Functio est $cos.4s$. Quare, si Z fuerit Functio ipsarum z & $cos.4s$; seu, quod eodem redit, ipsarum $xx+yy$ & $x^4 - 6xxyy + y^4$, tum æquatio $Z=0$, dabit Curvam quatuor Diametris præditam. Erit ergo Z Functio ipsarum t & u, positis $t = xx+yy$ & $u = x^4 - 6xxyy + y^4$; Ponatur autem $v = tt - u$, eritque Z Functio ipsarum t & v, hoc est ipsarum $xx+yy$ & $xxyy$. Vel etiam Z ita definiri potest ut sit Functio harum duarum quantitatum $xx+yy$ & x^4+y^4.

353. Ut Curva æquatione $Z=0$, expressa habeat quinque Diametros, oportet ut Z sit Functio ipsarum z & $cos.5s$. Quare, sumtis Coordinatis orthogonalibus x & y, ob $cos.5s = \frac{x^5 - 10x^3yy + 5xy^4}{z^5}$, debebit esse Z Functio rationalis harum expressionum $xx+yy$ & $x^5 - 10x^3yy + 5xy^4$. Curva igitur simplicissima, quæ, præter Circulum, quinque habeat Diametros, est Linea quinti ordinis, atque hac æquatione exprimetur $x^5 - 10x^3yy + 5xy^4 = a(xx+yy)^2 + b(xx+yy) + c$. Hæc ergo Curva, propter omnes Factores supremi membri reales, habebit quinque Asymtotas suis intersectionibus pentagonum regulare, in cujus medio sit Centrum C, formantes.

354. Ex his jam generaliter patet, Curvam æquatione $Z=0$, expressam, habituram esse n Diametros, quarum binæ proxime angulum $= \frac{\varpi}{n}$ comprehendant, si fuerit Z Functio ipsarum z & $cos.ns$, seu inter Coordinatas orthogonales, Functio quæcunque rationalis harum expressionum $xx+yy$ & $x^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^{n-4}y^4 -$ &c. Seu æquatio hæc

$$0 = \alpha + \beta t + \gamma u + \delta tt + \varepsilon tu + \zeta uu + \eta t^3 + \theta ttu + \&c.$$

præbebit Curvam n Diametris præditam, si ponatur $t = xx+yy$

 &

LIB. II. $\& \; u = x^n - \frac{n(n-1)}{1.\,2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4} x^{n-4} y^4 - \&c.$

Hinc ergo Curvæ inveniri poſſunt, quæ tot, quot lubuerit, habeant Diametros ſe mutuo in angulis æqualibus in eodem puncto C interſecantes. Simul vero hæ æquationes in ſe complectuntur omnes omnino Curvas algebraïcas, quæ dato Diametrorum numero ſint præditæ.

TAB. XVII. Fig. 70. 355. Hujuſmodi Curvæ pluribus Diametris præditæ duplo plures habent partes inter ſe ſimiles & æquales. Sic Curva duabus Diametris prædita quatuor habet partes ſimiles & æquales, AE, BE, AF & BF. Curva autem tribus Diametris prædita habet ſex partes ſimiles & æquales AE, GE, GB, FB, FH & AH. Atque Curva quatuor Diametris prædita octo habet partes ſimiles & æquales AE, AK, GE, GI, BI, BF, HF, & HK; ſimilique modo numerus partium æqualium ſemper duplo major eſt quam numerus Diametrorum. Quemadmodum autem ſupra vidimus dari Curvas, duas partes ſimiles habentes, quæ tamen Diametro careant, ita dabuntur quoque Curvæ plures partes ſimiles & æquales habentes, quæ tamen Diametris deſtituantur.

TAB. XVII. Fig. 71. TAB. XVIII. Fig. 72.

TAB. XVIII. Fig. 73. 356. Incipiamus a duabus partibus æqualibus ſibi e regione oppoſitis AME, BKF, quem quidem caſum ſupra jam tractavimus. Quod ſi enim Curva duas tantum habere debeat partes æquales, neceſſario ſibi oppoſitæ eſſe debent, quod clarius patebit, quando plures partes æquales contemplabimur. Ponamus ergo, ut ante, $CM = z$, & angulum $ACM = s$, ac manifeſtum eſt angulis s & $\pi + s$ eundem valorem ipſius z convenire oportere; ſumto enim angulo $ACM = \pi + s$, fiet $z = CK$: at eſſe debet $CK = CM$; quærenda ergo eſt expreſſio communis angulis s & $\pi + s$, cujuſmodi eſt $tang.\, s$; eſt enim $tang.\, s = tang.\,(\pi + s)$. Æquatio igitur $Z = 0$, erit pro tali Curva, qualem quærimus, ſi fuerit Z Functio ipſarum z & $tang.\, s$, ſeu Functio ipſarum $xx + yy$ & $\frac{x}{y}$. Ponamus $\frac{x}{y} = t$, eritque $xx + yy = yy(1 + tt)$.

Quare

Quare Z debebit esse Functio ipsarum t & $yy(1+tt)$, hoc est ipsarum t & yy: unde eædem æquationes resultant, quas supra invenimus.

357. Quo autem fractiones, quibus tangentes laborant, evitemus, idem negotium per sinus & cosinus expedire poterimus. Cum enim sit & $\sin. 2s = \sin. 2(\pi + s)$ & $\cos. 2s = \cos. 2(\pi + s)$, quæsitum obtinebitur si Z capiatur Functio quæcunque rationalis trium harum formularum z, $\sin. 2s$ & $\cos. 2s$, seu ipsarum $xx + yy$, $2xy$, & $xx - yy$. Ubi notandum est, si expressionum $\sin. 2s$ & $\cos. 2s$ altera omittatur, Curvam insuper Diametrum esse habituram. Solutio ergo huc redibit ut Z capiatur Functio ipsarum xx, yy, & xy, rationalis; unde hujusmodi orietur æquatio

$$0 = \alpha + \beta xx + \gamma xy + \delta yy + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta x^2 y^2 + \theta xy^3 + \iota y^4 + \&c.$$

Atque, si termini, in quibus non inest x, evanescant, tota æquatio dividi poterit per x & prodibit

$$0 = \beta x + \gamma y + \varepsilon x^3 + \zeta xxy + \eta xy^2 + \theta y^3 + \varkappa x^5 + \&c.$$

quæ sunt ambæ illæ æquationes quas supra invenimus.

358. Quæratur nunc Curva, quæ tres tantum habeat partes similes & æquales AM, BN, & DL. Hæc ergo ita erit comparata, ut eductis ex puncto medio C tribus rectis CM, CN, & CL in angulis æqualibus, eæ semper inter se futuræ sint æquales. Positis ergo angulo $ACM = s$, & recta $CM = z$; recta z per s ita definietur, ut his tribus angulis s, $\frac{2}{3}\pi + s$, & $\frac{4}{3}\pi + s$ idem valor ipsius z conveniat; est enim $MCN = NCL = \frac{2}{3}\pi$. Horum autem trium angulorum communes sunt hæ expressiones $\sin. 3s$ & $\cos. 3s$. Quare, si Z fuerit Functio rationalis harum trium quantitatum $xx + yy$; $3xxy - y^3$; & $x^3 - 3xyy$, æquatio $Z = 0$, dabit Curvas quæsitas omnes. Hujusmodi ergo orietur æquatio generalis TAB. XVIII. Fig. 74.

$0 =$

$$0 = \alpha + \beta(xx+yy) + \gamma(3xxy - y^3) + \delta(x^3 - 3xyy) + \varepsilon(xx+yy)^2 + \zeta(xx+yy)(3xxy - y^3) + \eta(xx+yy)(x^3 - 3xyy) + \&c.$$

Lineæ igitur tertii ordinis hac proprietate præditæ continentur in hac æquatione

$$0 = \alpha + \beta xx + \beta yy + \delta x^3 + 3\gamma xxy - 3\delta xyy - \gamma y^3$$

TAB. XVIII. Fig. 73. 359. Si Curva quatuor habere debeat partes æquales AM, EN, BK, & FL, ita ut ex puncto medio C eductis quatuor rectis quibus vis CM, CN, CK & CL, ſub angulis æqualibus, eæ futuræ ſint æquales; ponatur angulus $ACM = s$ & recta $CM = z$; atque, ob angulos $MCN = NCK = KCL = 90° = \frac{1}{2}\pi$, recta z per angulum s ita debet exprimi, ut his angulis s, $\frac{1}{2}\pi + s$, $\pi + s$; $\frac{3}{2}\pi + s$ idem reſpondeat valor. Hanc vero proprietatem habent expreſſiones $\sin. 4s$ & $\cos. 4s$: quare æquatio $Z = 0$, dabit Curvam quatuor ejuſmodi partibus æqualibus præditam, ſi fuerit Z Functio quæcunque rationalis harum trium quantitatum $xx + yy$; $4x^3y - 4xy^3$ & $x^4 - 6xxyy + y^4$. Hinc æquatio generalis pro iſtiuſmodi Curvis erit

$$0 = \alpha + \beta xx + \beta yy + \gamma x^4 + \delta x^3y + \varepsilon xxyy - \delta xy^3 + \gamma y^4 + \&c.$$

360. Simili modo apparet, ſi quæri debeat Curva Diametris deſtituta, quæ tamen quinque habeat partes æquales & ſimiles, in æquatione $Z = 0$, eſſe debere Z Functionem rationalem harum trium quantitatum

$$xx + yy;\ 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 \ \& \ x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4;$$

atque, ſi numerus partium æqualium eſſe debeat $= n$, tum Z eſſe debet Functio rationalis harum trium $xx + yy$,

nx

$$n x^{n-1} y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3} y^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} x^{n-5} y^5 - \&c.,$$ CAP. XV.

&

$$x^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^{n-4} y^4 - \&c..$$

Quod ſi alterutra poſteriorum expreſſionum non ingrediatur in æquationem, Curva habebit tot Diametros, quot numerus n continet unitates.

361. In duplici hac enumeratione Curvarum aliquot partes æquales habentium, quæ vel Diametris ſint præditæ vel iis careant, continentur omnino omnes Curvæ algebraïcæ, quæ quidem duas pluresve habeant partes ſimiles & æquales. Quod ut oſtendatur, habeat Curva continua duas partes OAa, OBb inter ſe ſimiles & æquales. Jungatur AB, ſuperque ea tanquam baſi conſtituatur triangulum iſoſcele ACB, cujus angulus C æqualis ſit angulo O. Jam, quia anguli OAC & OBC ſunt æquales, erunt quoque Curvæ partes CAa & CBb ſimiles & æquales: atque, ob legem continuitatis, ſi capiantur anguli BCD, DCE, &c., æquales ſinguli angulo ACB, & $CD = CE = CA = CB$, habebit Curva præterea ad has ſingulas rectas partes Dd, Ee, &c., ſimiles & æquales partibus Aa, Bb. Niſi ergo ratio anguli ACB ad $360°$ fuerit irrationalis, partium æqualium numerus erit finitus, contra autem infinitus, neque adeo in Lineas algebraïcas cadens. Semper ergo Curva iſta continetur in iis, quas ante inveſtigavimus, Diametris carentes. TAB. XVIII. *Fig.* 75.

362. Sin autem duæ partes ſimiles & æquales in plagas oppoſitas rectarum AO & BO cadant, ita ut ſit pars AOa ſimilis & æqualis parti OBb; tum utrinque ducantur rectæ AR, & BS, ut ſit $OAR = OBS, = \frac{1}{2} AOB$; eruntque rectæ AR & BS inter ſe parallelæ. Jungatur AB, & per punctum medium C agatur ipſis AR & BS parallela CV, erunt partes aA, bB reſpectu rectæ CV ſimiles & æquales. Niſi igitur ſit $ba = 0$, quia Arcui bB, a b ad a progrediendo, reſpondet ex altera parte Arcus ſimilis & æqualis aA; ita TAB. XIX. *Fig.* 76.

 quoque

LIB. II. quoque huic ab a ad e per ſpatium $ae = ba$ progrediendo, reſpondebit ex altera parte Arcus ſimilis & æqualis eE, huicque porro Arcus dD, ita ut hæc Curva habitura ſit infinitas partes ſimiles & æquales utrinque circa rectam CV diſpoſitas. Hujuſmodi ergo Curva algebraïca eſſe nequit.

363. Hoc ita ſe habet, ſi recta AB fuerit obliqua ad parallelas AR & BS, vel (quod eodem redit,) ſi in triangulo AOB latera AO & BO fuerint inæqualia. Sin autem fuerit $AO = BO$, tum ſimul recta AB erit perpendicularis ad parallelas AR & BS, & ad CV, quæ ſimul per O tranſibit. Hoc ergo caſu puncta b & a congruent. Et, quia portiones aA & bB non ſolum erunt æquales & ſimiles, ſed etiam utrinque circa rectam CV æqualiter diſpoſitæ, hæc recta CV erit Curvæ Diameter; qui caſus ad priores Curvas expoſitas Diametro gaudentes pertinent. Quocirca ad caſus in hoc Capite expoſitos referuntur omnes omnino Curvæ algebraïcæ, quæ duas pluresve partes habent ſimiles & æquales.

CAPUT XVI.

De inventione Curvarum ex datis Applicatarum proprietatibus.

364. Sint P & Q Functiones quæcunque rationales Abſciſſæ x, atque natura Curvæ exprimatur hac æquatione $yy - Py + Q = 0$. Hinc ergo unicuique Abſciſſæ x vel nulla vel duplex reſpondebit Applicata; erit autem harum duarum Applicatarum ſumma $= P$ & productum $= Q$. Si igitur P fuerit quantitas conſtans, ſumma binarum Applicatarum ſingulis Abſciſſis reſpondentium erit conſtans, atque Curva habebit Diametrum; hoc idem autem evenit ſi fuerit $P = a + nx$; tum enim Linea recta hac æquatione $z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}nx$ contenta erit Diameter, in latiore ſignificatione

tione hoc nomine accepto, ita ut obliquitas non excludatur. Sin autem fuerit Q quantitas constans, tum rectangulum binarum Applicatarum erit ubique constans; Axis ergo a Curva nusquam secari poterit. At si sit $Q = \alpha + \beta x + \gamma xx$, hæcque expressio duos habeat Factores reales, Axis à Curva in duobus punctis trajicietur, atque Q erit multiplum rectanguli ex partibus Axis, ideoque rectangulum Applicatarum se habebit ad rectangulum partium Axis in constanti ratione. CAP. XVI.

365. Hæ igitur proprietates, quas supra Sectionibus conicis convenire observavimus, in innumerabiles alias Lineas curvas competunt. Sic, constans magnitudo rectangulorum ex binis Applicatis eidem Abscissæ respondentibus formatorum, qua Hyperbolam ad Asymtotam relatam gaudere vidimus, communis ipsi est cum omnibus Curvis hac æquatione $yy - Py \pm aa = 0$, contentis. Deinde, sumta recta EF Curvam in duobus punctis E & F secante pro Axe, cum in Sectionibus conicis rectangulum $PM.PN$ ad rectangulum $PE.PF$ constantem habeat rationem, hæc proprietas Sectionibus conicis communis erit cum omnibus Curvis in hac æquatione $yy - Py + ax - nxx = 0$ contentis. Erit autem $PM.PN = PE.PF$ seu $pm.pn = Ep.pF$, si fuerit $yy - Py = ax - xx$. Hæc igitur proprietas, qua Circulum præditum esse ex Elementis constat, non solum ipsi communis est cum infinitis Curvis altiorum ordinum, sed etiam in reliquas Sectiones conicas cadit. Sit enim $P = b + nx$, atque æquatio $yy - nxy + xx = ax + by$, quæ est pro Circulo si $n = 0$, & angulus EPM rectus, complectetur quoque Ellipsin si nn minor quam 4, & Hyperbolam si nn major quam 4, atque Parabolam si $nn = 4$. TAB. V. Fig. 19.

366. Hinc concludimus in omni Sectione conica $AEBF$ cujus Axes, seu Diametri principales, sint AB, EF, si binæ ducantur rectæ quæcunque pq & mn, quæ ad Axes principales sub angulo semirecto inclinentur, eas in h se mutuo ita esse secturas, ut sit $mh.nh = ph.qh$. Quod quidem manifestum est ex proprietatibus palmariis: si enim per Centrum TAB. XIX. Fig. 77.

LIB. II. C ducantur rectæ PQ & MN ſub angulis ſemirectis ad Axes principales, erunt inter ſe æquales, ideoque $MC.NC = PC.QC$; quare, cum omnes rectæ his parallelæ eadem lege ſe ſecent, erit quoque $mh.nh = ph.qh$. Quin etiam hinc intelligitur, ſi modo rectæ MN & PQ ita ducantur, ut ad eundem Axem principalem æqualiter inclinentur, ſeu ut ſit $PCA = NCA$, ob $CP = CN$, omnes rectas his parallelas ſe mutuo ita ſecare, ut rectangula partium ſint æqualia, ſcilicet ut ſit $mh.hn = ph.hq$.

TAB. XIX. Fig. 78. 367. His præmiſſis, contemplemur alias quæſtiones circa binas Applicatas cuique Abſciſſæ reſpondentes ex æquatione $yy - Py + Q = 0$. Sit AP Abſciſſa $= x$, cui reſpondeant duæ Applicatæ PM, PN: ac primo quærantur omnes Curvæ hujus indolis ut ſit $PM^2 + PN^2$ quantitas conſtans $= aa$. Cum ſit $PM + PN = P$ & $PM.PN = Q$, erit $PM^2 + PN^2 = PP - 2Q$, & quæſito ſatisfiet ſi fuerit $PP - 2Q = aa$ ſeu $Q = \frac{PP - aa}{2}$; unde, pro Curvis deſideratis obtinebitur iſta æquatio $yy - Py + \frac{PP - aa}{2} = 0$. Quod ſi ponatur $P = 2nx$, prodibit Sectio conica proprietate propoſita gaudens, $yy - 2nxy + 2nnxx - \frac{1}{2}aa = 0$, quæ æquatio eſt pro Ellipſi, Abſciſſis a Centro computatis.

TAB. XIX. Fig. 79. 368. Hinc ſequitur non inelegans Ellipſium proprietas iſta. Si circa Ellipſeos duas quaſvis Diametros conjugatas AB & EF deſcribatur parallelogrammum $GHIK$ cujus latera Ellipſin tangent in punctis A, B, E, F, hujus parallelogrammi diagonales GK & HI omnes chordas MN alterutri Diametro EF parallelas ita ſecabunt in P & p, ut ſit quadratorum ſumma $PM^2 + PN^2$ vel $pM^2 + pN^2$ perpetuo conſtans nempe æqualis $2CE^2$. Similique modo ducta chorda RS Diametro alteri AB parallela erit $PR^2 + PS^2 = \varpi R^2 + \varpi S^2 = 2CA^2$. Poſitis enim $CA = CB = a$, $CE = CF = b$, $CQ = t$, $QM = u$, erit $aauu + bbtt = aabb$. Jam eſt $a : b = CQ(t)$: PQ,

PQ, & CP ad CQ ratione data, puta $m:1$. Quare, posita $CP = x$, $PM = y$, erit $x = mt$ & $y = u + \frac{bt}{a}$, seu $t = \frac{x}{m}$, & $u = y - \frac{bx}{ma}$, quibus valoribus substitutis orietur ista æquatio $aayy - \frac{2abxy}{m} + \frac{2bbxx}{mm} = aabb$. Sit $\frac{b}{ma} = n$, erit $yy - 2nxy + 2nnxx = bb$, quæ est æquatio ante inventa indicans esse $PM^2 + PN^2$ magnitudinem constantem. Cap. XVI.

369. Quærantur nunc Curvæ in quibus sit summa cuborum $PM^3 + PN^3$ perpetuo quantitas constans. Cum sit $PM + PN = P$, erit $PM^3 + PN^3 = P^3 - 3PQ$: quare, si ponatur $PM^3 + PN^3 = a^3$, erit $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$: ideoque pro his Curvis erit æquatio generalis $yy - Py + \frac{1}{3}P^2 - \frac{a^3}{3P} = 0$, ubi pro P Functionem quamcunque rationalem ipsius x substituere licet. Simplicissima ergo Curva hanc habens proprietatem erit Linea tertii ordinis, quæ, ponendo $P = 3nx$, & $a = 3nb$, hac æquatione exprimetur Tab. XIX. Fig. 78.

$$xyy - 3nxxy + 3nnx^3 - 3nnb^3 = 0,$$

quæ pertinet ad Speciem secundam secundum enumerationem supra factam.

370. Simili modo, si effici debeat ut sit $PM^4 + PN^4$ constans, quia est $PM^4 + PN^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ$, quantitas Q per P ita determinari debet ut sit $P^4 - 4P^2Q + 2QQ = a^4$ seu $Q = PP + \surd(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)$. Quia vero tam P quam Q debent esse Functiones rationales seu uniformes ipsius x, ne y plures quam duos valores pro quavis Abscissa x induere possit, quantitas $\surd(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)$ deberet esse rationalis; quod cum fieri nequeat, Functio Q semper erit biformis, ideoque Applicatam y reddet Functionem quadriformem.

LIB. II. driformem. Verum ex æquatione $yy - Py + Q = 0$, elicitur $y = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{(-\frac{3}{4}PP \pm \sqrt{(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)})}$, unde patet Applicatam y realem esse non posse nisi $\sqrt{(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)}$ affirmative sumatur; quare, non obstante Functionis Q biformitate, Applicata y nunquam plures duobus valores habebit, quorum biquadratorum summa erit constans, sicut natura quæstionis requirit.

371. Quod si porro ejusmodi requiratur Curva, ut binorum ipsius y valorum cuique Abscissæ x respondentium potestates quintæ summam constantem constituant, seu ut sit $PM^5 + PN^5 = a^5$, debebit esse $P^5 - 5P^3Q + 5PQ^2 = a^5$. Cum igitur ex æquatione pro Curva $yy - Py + Q = 0$, sit $Q = -yy + Py$, erit $P^5 - 5P^4y + 10P^3yy - 10P^2y^3 + 5Py^4 = a^5$, seu $(P - y)^5 + y^5 = a^5$. Eodem modo reperietur, si debeat esse $PM^6 + PN^6 = a^6$ hæc æquatio $(P - y)^6 + y^6 = a^6$. Atque generaliter si quæratur Curva in qua sit $PM^n + PN^n = a^n$, obtinebitur ista æquatio $(P - y)^n + y^n = a^n$: ubi pro P Functio quæcunque uniformis ipsius x pro lubitu accipi potest. Ratio autem hujus æquationis in promtu est: cum enim summa ambarum Applicatarum sit $= P$, si altera sit y, altera erit $= P - y$, unde statim fit $(P - y)^n + y^n = a^n$.

372. Quod si autem loco Q eliminetur P, ponendo in æquationibus, quibus relatio inter P & Q continetur, $P = \frac{yy + Q}{y}$, orietur pro $PM^n + PN^n = a^n$ hæc æquatio $y^n + \frac{Q^n}{y^n} = a^n$ Cum enim Applicatarum productum sit $= Q$, si una ponatur $= y$, erit altera $= \frac{Q}{y}$: unde æquatio inventa

venta statim fluit. Pro Curvis ergo, in quibus sit $PM^n + PN^n = a^n$, duas nacti sumus æquationes generales, alteram $(P - y)^n + y^n = a^n$, alteram $y^n + \frac{Q^n}{y^n} = a^n$: ex quarum posteriori emergit $y^{2n} = a^n y^n - Q^n$, & $y^n = \frac{1}{2} a^n \pm \surd(\frac{1}{4} a^{2n} - Q^n)$, ita ut sit $y = \sqrt[n]{}(\frac{1}{2} a^n \pm \surd(\frac{1}{4} a^{2n} - Q^n))$, quæ est Functio tantum biformis, atque pro quavis Abscissa plures duabus Applicatas non exhibet, dummodo Q^n fuerit Functio rationalis seu uniformis, ipsius x. Prior autem æquatio $y^n + (P - y)^n = a^n$ hac gaudet prærogativa ut numerus dimensionum sit minor. CAP. XVI.

373. Neque vero hæ æquationes solum quæstionem solvunt si n sit numerus integer affirmativus, sed etiam si sit vel negativus vel fractus. Sic

si debeat esse	habebitur hæc æquatio
$\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{1}{a}$	$aP = Py - yy$ seu $aQ + ayy = Qy$
$\frac{1}{PM^2} + \frac{1}{PN^2} = \frac{1}{a^2}$	$a^2y^2 + a^2(P - y)^2 = y^2(P - y)^2$ seu $a^2Q^2 + a^2y^4 = Q^2y^2$
$\frac{1}{PM^3} + \frac{1}{PN^3} = \frac{1}{a^3}$	$a^3y^3 + a^3(P - y)^3 = y^3(P - y)^3$ seu $a^3Q^3 + a^3y^6 = Q^3y^3$

&c.

Pro

LIB. II. Pro exponentibus autem fractis ita res ſe habebit:

ſi debeat eſſe	habebitur hæc æquatio
$\sqrt{PM}+\sqrt{PN}=\sqrt{a}$	$\sqrt{y}+\sqrt{(P-y)}=\sqrt{a}$ ſeu $y=\sqrt{ay}-\sqrt{Q}$ quæ ad rationalitatem reductæ præbent $yy-Py+\frac{1}{4}(a-P)^2=0$ ſeu $yy-(a-2\sqrt{Q})y+Q=0$
$\sqrt[3]{PM}+\sqrt[3]{PN}=\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{(P-y)}=\sqrt[3]{a}$ vel $yy-Py+\frac{1}{27a}(a-P)^3=0$ ſeu $\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{\frac{Q}{y}}=\sqrt[3]{a}$ vel $yy-(a-3\sqrt[3]{aQ})y+Q=0$ &c.

Hoc igitur modo omnes Curvæ algebraïcæ, in quibus ubique ſit $PM^n+PN^n=a^n$, una æquatione generali comprehendi poſſunt, ſive n ſit numerus integer affirmativus, ſive negativus, ſive fractus.

374. Quæ hic de conditione duarum Applicatarum unicuique Abſciſſæ x reſpondentium ſunt expoſita, eadem methodo transferri poſſunt ad ternas Applicatas ſingulis Abſciſſis reſpondentes. Æquatio autem generalis pro Curvis, quas ſingulæ Applicatæ in tribus punctis ſecant eſt hæc

$$y^3-Py^2+Qy-R=0,$$

denotantibus litteris P, Q, & R Functiones quaſcunque uniformes

formes ipsius x. Sint p, q, r tres Applicatæ Abscissæ x respondentes, quarum una quidem semper est realis, verum hic ad ea potissimum Curvæ loca spectamus, in quibus omnes tres Applicatæ sint reales. Erit autem ex natura æquationum $P = p + q + r$; $Q = pq + pr + qr$; & $R = pqr$. Quare, si Curva desideretur, in qua sit vel $p + q + r$ vel $pq + pr + qr$, vel pqr quantitas constans, nil aliud est faciendum nisi ut vel P, vel Q vel R quantitas constituatur constans, binis reliquis manentibus arbitrariis. CAP. XVI.

375. Hinc quoque Curvæ inveniri poterunt, in quibus sit $p^n + q^n + r^n$, quantitas constans ubique; est enim, per ea quæ in superiori libro sunt tradita,

$$\begin{aligned}
p + q + r &= P \\
p^2 + q^2 + r^2 &= P^2 - 2Q \\
p^3 + q^3 + r^3 &= P^3 - 3PQ + 3R \\
p^4 + q^4 + r^4 &= P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR \\
p^5 + q^5 + r^5 &= P^5 - 5P^3Q + 5PQQ + 5PPR - 5QR \\
&\&c.
\end{aligned}$$

Deinde, si n sit numerus negativus, ponatur $z = \frac{1}{y}$; erit $z^3 - \frac{Qzz}{R} + \frac{Pz}{R} - \frac{1}{R} = 0$, & hujus æquationis tres radices sunt $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$. Hinc simili modo erit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} &= \frac{Q}{R} \\
\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} &= \frac{Q^2 - 2PR}{RR} \\
\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} &= \frac{Q^3 - 3PQR + 3RR}{R^3} \\
\frac{1}{p^4} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{r^4} &= \frac{Q^4 - 4PQ^2R + 4QRR + 2P^2R^2}{R^4} \\
&\&c.
\end{aligned}$$

LIB. II. Hujusmodi ergo expressio quantitati constanti æqualis posita præbebit relationem idoneam inter Functiones P, Q & R. Atque, si hujus æquationis ope, ex æquatione $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$, una harum Functionum P, Q, vel R eliminetur, habebitur æquatio pro Curva quæsita. Sic, si quæratur Curva in qua sit $p^3 + q^3 + r^3 = a^3$, fiet $P^3 - 3PQ + 3R = a^3$; &, ob $R = y^3 - Py^2 + Qy$, habebitur hæc æquatio $3y^3 - 3Py^2 + 3Qy + P^3 - 3PQ = a^3$ pro Curvis quæsito satisfacientibus.

376. Sive igitur n sit numerus affirmativus sive negativus integer, solutio per datas formulas facile expedietur; at major difficultas occurrit si n fuerit numerus fractus. Proponatur quærenda Linea curva, in qua sit $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = \sqrt{a}$. Sumantur utrinque quadrata: atque, ob $p + q + r = P$, habebitur $P + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr} = a$, seu $\frac{a - P}{2} = \sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr}$. Sumantur denuo quadrata; atque, ob $pq + pr + qr = Q$, erit $\frac{(a - P)^2}{4} = Q + 2\sqrt{p^2qr} + 2\sqrt{pq^2r} + 2\sqrt{pqr^2} = Q + 2(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})\sqrt{pqr} = 2\sqrt{aR} + Q$: unde oritur $(a - P)^2 = 4Q + 8\sqrt{aR}$, seu $Q = \frac{(a - P)^2}{4} - 2\sqrt{aR}$. Quare, Curvæ quæsitæ continebuntur in hac æquatione $y^3 - Pyy + (\frac{1}{4}(a - P)^2 - 2\sqrt{aR})y - R = 0$; seu, (sublata irrationalitate, ob $R = \frac{(aa - 2aP + PP - 4Q)^2}{64a}$,) in hac æquatione $y^3 - Pyy + Qy - \frac{(aa - 2aP + PP - 4Q)^2}{64a} = 0$.

377. Hæc autem operatio nimis fit molesta, si radices altiorum potestatum proponantur: alia ergo via erit ineunda, quæ ex hoc exemplo perspicietur. Quæratur nempe Curva in qua sit $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{a}$. Ponatur $\sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{pr} + \sqrt[3]{qr} = v$: &, cum sit $\sqrt[3]{pqr} = \sqrt[3]{R}$, fiet $\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} + \sqrt[3]{r^2} = \sqrt[3]{aa} - 2v$;

$2v$; & $p+q+r=a-3v\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{R}=P$. Deinde, $\sqrt[3]{p^2q^2}+\sqrt[3]{p^2r^2}+\sqrt[3]{q^2r^2}=v^2-2\sqrt[3]{aR}$, & $pq+pr+qr=Q=v^3-3v\sqrt[3]{aR}+3\sqrt[3]{RR}$. Inventis jam pro P & Q idoneis valoribus, ſumendo pro v Functionem quamcunque ipſius x, pro Curvis quæſitis obtinebitur hæc æquatio CAP. XVI.

$$y^3-(a-3v\sqrt{a}+3\sqrt[3]{R})y^2+(v^3-3v\sqrt[3]{aR}+3\sqrt[3]{R^2})y-R=0.$$

378. His tamen difficultatibus non obſtantibus ſolutio generalis concinnari poterit. Cum enim ex æquatione $y^3-Py^2+Qy-R=0$, y denotet has tres Applicatas p q, & r, ponatur $p=y$, erit $P=y+q+r$, & $Q=qy+ry+qr$, ſeu $q+r=P-y$, & $qr=Q-y(q+r)=Q-Py+yy$. Hinc prodit $q-r=\sqrt{(P^2+2Py-3yy-4Q)}$: ideoque

$$q=\frac{1}{2}(P-y)+\frac{1}{2}\sqrt{(P^2+2Py-3yy-4Q)},$$
&
$$r=\frac{1}{2}(P-y)-\frac{1}{2}\sqrt{(P^2+2Py-3yy-4Q)}.$$

Quando ergo quæritur Curva in qua ſit $p^n+q^n+r^n=a^n$, ſatisfaciet hæc æquatio

$$y^n+\left(\frac{1}{2}(P-y)+\frac{1}{2}\sqrt{(P^2+2Py-3yy-4Q)}\right)^n+\left(\frac{1}{2}(P-y)-\frac{1}{2}\sqrt{(P^2+2Py-3yy-4Q)}\right)^n=a^n$$

quæ æque quæſtionem ſolvit, ſive n fuerit numerus integer ſive fractus.

379. Innumerabiles aliæ quæſtiones circa conditionem harum trium Applicatarum eadem methodo reſolvi poſſunt: velut, ſi pro a^n Functio quæcunque ipſius x aſſumatur; tum vero etiam, præter ſummam quarumcunque poteſtatum, aliæ Functiones ipſarum $p, q,$ & r proponi poſſunt, dummodo hæ quantitates ita æqualiter inſint, ut earum permutatione nulla variatio oriatur.

LIB. II. oriatur. Sic, istæ tres Applicatæ p, q, & r eidem Abscissæ x respondentes ita definiri poterunt, ut triangulum, quod ex iis formatur, constantem habeat aream. Hujus enim trianguli area erit $= \frac{1}{4}\sqrt{(2ppqq + 2pprr + 2qqrr - p^4 - q^4 - r^4)}$ quæ ponatur $= aa$. Cum igitur sit $p^4 + q^4 + r^4 = P^4 - 4P^2Q + 4PR + 2QQ$, & $p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2 = Q^2 - 2PR$, fiet $16a^4 = 4P^2Q - 8PR - P^4$, & $R = \frac{1}{2}PQ - \frac{1}{8}P^3 - \frac{2a^4}{P}$; ideoque habebitur ista æquatio $y^3 - Pyy + Qy - \frac{1}{2}PQ + \frac{1}{8}P^3 + \frac{2a^4}{P} = 0$. Si P capiatur constans $= 2b$, fiet insuper perimeter omnium horum triangulorum constans. Quare, si sumatur $Q = mxx + nbx + kaa$, prodibit Linea tertii ordinis hac æquatione expressa

$$y^3 + mxxy - 2byy + nbxy - mbxx + kaay - nbbx + \frac{a^4}{b} - kaab + b^3 = 0,$$

cujus hæc erit proprietas, ut trium Applicatarum p, q, & r singulis Abscissis respondentium primum summa sit constans, $= 2b$, tum vero Area trianguli ex lateribus p, q, & r formati sit ubique eadem $= aa$.

380. Similes quæstiones ejusdem methodi ope resolvi possunt circa quatuor pluresve Applicatas eidem Abscissæ respondentes; in quo negotio cum nulla amplius occurrat difficultas, ad alias progrediamur quæstiones, in quibus Applicatæ non eidem Abscissæ, sed diversis respondentes inter se comparentur. Proposita scilicet relatio quædam inter Applicatas PM & QN, quarum altera Abscissæ $AP = +x$, altera Abscissæ $AQ = -x$ respondeat. Sit $y = X$, æquatio pro hac Curva, existente X Functione quacunque ipsius x, atque hæc Functio X dabit Applicatam PM: quod si vero loco $+x$ ubique ponatur $-x$, eadem Functio X dabit alteram Applicatam QN. Si ergo X esset Functio par ipsius x, puta $= P$, foret $QN = PM$, sin autem sit X Functio impar ipsius

TAB. XIX. Fig. 80.

ipsius x, puta $= Q$, erit $QN = -PM$. Atque si P & R denotent Functiones pares, at Q & S Functiones impares ipsius x, fueritque æquatio pro Curva $y = \frac{P+Q}{R+S}$, erit $PM = \frac{P+Q}{R+S}$ & $QN = \frac{P-Q}{R-S}$. Cap. XVI.

381. Quærenda sit Curva hujus indolis, ut sit $PM + QN$ quantitas constans, nempe $= 2AB = 2a$. Atque manifestum est huic quæstioni satisfacere æquationem $y = a + Q$, existente Q Functione impare ipsius x; erit enim $PM = a + Q$ & $QN = a - Q$ ideoque $PM + QN = 2a$, uti requiritur. Quod si ergo ponatur $y - a = u$, erit $u = Q$, quæ erit æquatio pro eadem Curva, sumta recta Bp pro Axe & puncto B pro Abscissarum x initio, ita ut sit $Bp = x$ & $pM = u$. Æquatio autem $u = Q$ indicat Curvam partibus æqualibus utrinque circa Centrum B alternatim dispositis præditam. Descripta ergo hujusmodi Curva quacunque MBN sumtaque recta quacunque PQ pro Axe, quæstioni ita satisfiet, ut demisso in hunc Axem ex Centro B perpendiculo BA, sumtisque utrinque Abscissis æqualibus $AP = AQ$, semper futura sit summa $PM + QN$ constans $= 2AB$.

382. Pro Curvis autem, quæ duas habent partes æquales circa Centrum B alternatim dispositas, duas invenimus supra æquationes, quæ inter Coordinatas x & u sunt

I.

$$0 = \alpha x + \beta u + \gamma x^3 + \delta x^2 u + \varepsilon x u u + \zeta u^3 + \eta x^5 + \theta x^4 u + \&c.$$

II.

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma x u + \delta u^2 + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 u + \eta x^2 u^2 + \theta x u^3 + \&c.$$

Quare, si in utraque harum æquationum, ponatur $u = y - a$, habebuntur duæ æquationes generales inter Coordinatas x & y pro Curvis algebraicis quæstioni propositæ satisfacientibus. Satisfacit ergo primo omnis Linea recta per punctum B ducta, deinde quoque omnis Sectio conica Centrum habens in puncto B quæstionem solvet. Quia vero hoc posteriori casu utri-

LIB. II. que Abſciſſæ AP, & AQ gemina Applicata reſpondet, (niſi Curva exiſtente Hyperbola, Applicatæ alteri Aſymtotæ parallelæ capiantur ;) bina habebuntur Applicatarum paria eandem ſummam conſtituentia.

383. Si quæratur Curva MBN, in qua non ſumma binarum Applicatarum PM & QN, ſed ſumma quarumcunque poteſtatum earum ſit conſtans, ſolutio ſimili modo abſolvetur. Oporteat enim eſſe $PM^n + QN^n = 2a^n$: atque perſpicuum eſt huic conditioni ſatisfieri hac æquatione $y^n = a^n + Q$, exiſtente Q Functione quacunque impari ipſius x : erit enim $PM^n = a^n + Q$, & $QN^n = a^n - Q$: ideoque $PM^n + QN^n = 2a^n$. Ponatur $y^n - a^n = u$, atque æquatio $u = Q$ exprimet naturam Curvæ duabus partibus æqualibus alternis circa Centrum B diſpoſitis præditam inter Coordinatas x & u. Quam ob rem ſi in æquationibus §. præcedenti datis ubique loco u ſcribatur $y^n - a^n$, prodibunt æquationes generales pro Curvis quæſito ſatisfacientibus.

384. Cum igitur hujuſmodi quæſtiones nihil habeant difficultatis, propoſita ſit hæc quæſtio, qua quæritur Curva MBN, ita ut in Axe a puncto fixo A, ſi ſumantur utrinque Abſciſſæ AP, AQ æquales, rectangulum Applicatarum $PM . QN$ futurum ſit magnitudinis conſtantis, puta $= aa$. Hujus quæſtionis plures dari poſſunt ſolutiones particulares, quarum præcipuas, antequam in generalem inquiramus, hic evolvamus. Sit P Functio par, & Q Functio impar ipſius Abſciſſæ $AP = x$, ac ponatur Applicata $PM = y = P + Q$; ex qua, ſumta x negativa, fiet $QN = P - Q$. Oportet ergo eſſe $PM \times QN = PP - QQ = aa$, ſeu $P = \surd(aa + QQ)$: quæ expreſſio $\surd(aa + QQ)$, quia QQ eſt Functio par ipſius x, ac propterea quoque ipſa Functionem parem exhibet, convenientem

nientem valorem pro P præbet. Hinc pro Curva quæſita habebitur iſta æquatio $y = Q + \sqrt{(aa + QQ)}$, ſumendo pro Q Functionem quamcunque imparem ipſius x. CAP. XVI.

385. Cum autem ſignum radicale per ſe ambiguitatem involvat, unicuique Abſciſſæ x gemina reſpondebit Applicata, altera affirmativa altera negativa; ſic, Abſciſſæ AP reſpondebunt Applicatæ $Q + \sqrt{(aa + QQ)}$ & $Q - \sqrt{(aa + QQ)}$; at Abſciſſæ AQ convenient Applicatæ $-Q + \sqrt{(aa + QQ)}$ & $-Q - \sqrt{(aa + QQ)}$: unde Curva partes habebit æquales circa punctum A, tanquam Centrum, alternatim poſitas. Neque vero hanc ambiguitatem a ſigno ortam tollere licet, ſumendo pro Q ejuſmodi Functionem imparem, uti $\frac{aa}{4x} - x$, qua fiat $aa + QQ$ quadratum; fieret enim $\sqrt{(aa + QQ)} = \frac{aa}{4x} + x$ ideoque Functio impar, quæ in locum ipſius P ſubſtitui non poſſet. Quocirca pro Q ejuſmodi Functio impar ipſius x ſumi debet, ut $aa + QQ$ non fiat quadratum.

386. Simili modo, ſi ponatur $y = (P + Q)^n$, fiet $QN = (P - Q)^n$: ideoque eſſe debebit $(P^2 - Q^2)^n = aa$. Hinc fiet $P^2 = a^{\frac{2}{n}} + Q^n$, & $P = \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^n)}$, quæ quantitas, dummodo fuerit irrationalis, pro P aſſumi poterit. Quare pro Curva quæſtioni ſatisfaciente obtinebitur hæc æquatio $y = (Q + \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)})^n$. Constructio autem harum Curvarum erit facilis: deſcribatur Curva quæcunque duas partes ſimiles & æquales habens alternatim circa Centrum A poſitas, hujuſque Curvæ Applicata Abſciſſæ $AP = x$ reſpondens ponatur $= z$; erit z Functio impar ipſius x; ideoque in locum ipſius Q ſubſtitui poterit. At, ex æquatione inventa oritur $y^{\frac{1}{n}} - Q = \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)}$: ideoque $Q =$

$z =$

LIB. II. $z = \frac{y^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{2}{n}}}{2y^{\frac{1}{n}}}$. Ponatur $\frac{1}{n} = m$; atque, si in æquatione inter z & x data ubique ponatur $z = \frac{y^{2m} - a^{2m}}{2y^m}$, obtinebitur æquatio inter x & y pro Curva quæsita. Cum igitur inter z & x binas invenerimus æquationes; scilicet, vel

$$0 = \alpha + \beta xx + \gamma xz + \delta zz + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 z + \eta x^2 z^2 + \theta xz^3 + \&c.$$
vel
$$0 = \alpha x + \beta z + \gamma x^3 + \delta x^2 z + \varepsilon xz^2 + \zeta z^3 + \eta x^5 + \theta x^4 z + \&c.$$

si in his æquationibus ponatur $z = y^m - \frac{a^{2m}}{y^m}$ (divisorem 2 negligimus quia pro Q quodcunque multiplum ipsius z sumi potest), duæ orientur æquationes generales pro Curvis quæsito satisfacientibus.

387. Sit, præter P, quoque R Functio par, & præter Q quoque S Functio impar ipsius x, ac statuatur pro Curvis quæsitis hæc æquatio $y = \frac{P+Q}{R+S} = PM$: erit ergo $QN = \frac{P-Q}{R-S}$, fietque $\frac{PP-QQ}{RR-SS} = aa$, cui conditioni facillime satisfit ponendo $y = \frac{P+Q}{P-Q} \cdot a$, vel etiam statuendo $y = \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)^n a$. Hoc modo prius incommodum, quod cuique Abscissæ duæ pluresve Applicatæ respondebant, evitatur, atque ejusmodi Curvæ inveniuntur, ut singulis Abscissis unica tantum Applicata respondeat. Hinc Curva simplicissima satisfaciens erit Linea secundi ordinis hac æquatione $y = \frac{b+x}{b-x} a$ contenta; atque ideo Hyperbola. Hyperbola vero etiam satisfacit æquationi

quationi prius inventæ $y = Q + \sqrt{(aa + QQ)}$, ponendo $Q = nx$: erit enim $yy - 2nxy = aa$. Unde huic problemati duplici modo per Hyperbolam ſatisfieri poteſt. Cap. XVI.

388. His præmiſſis, perſpicuum eſt æquationem pro Curva quæſita ita comparatam eſſe debere, ut ea, ſi loco x ponatur $-x$, & $\frac{aa}{y}$ loco y, nullam alterationem patiatur. Hujuſmodi formulæ ſunt $(y^n + \frac{a^{2n}}{y^n})P$, & $(y^n - \frac{a^{2n}}{y^n})Q$; ſi quidem P Functionem parem & Q imparem ipſius x denotet. Quod ſi ergo æquatio formetur, quæ ex quotcunque hujuſmodi formulis fuerit compoſita, ea erit pro Curva quæſtioni ſatisfaciente. Quod ſi ergo M, P, R, T, &c., denotent Functiones quaſcunque pares ipſius x, atque N, Q, S, V, &c. Functiones impares, ſequens æquatio generalis habebitur

$$0 = M + (\frac{y}{a} + \frac{a}{y})P + (\frac{yy}{aa} + \frac{aa}{yy})R + (\frac{y^3}{a^3} + \frac{a^3}{y^3})T \text{ \&c.}$$
$$+ (\frac{y}{a} - \frac{a}{y})Q + (\frac{yy}{aa} - \frac{aa}{yy})S + (\frac{y^3}{a^3} - \frac{a^3}{y^3})V \text{ \&c.}$$

quæ ſi multiplicetur per Functionem imparem ipſius x, Functiones pares in impares & viciſſim permutabuntur: unde etiam hujuſmodi æquatio ſatisfaciet

$$0 = N + (\frac{y}{a} + \frac{a}{y})Q + (\frac{yy}{aa} + \frac{aa}{yy})S + (\frac{y^3}{a^3} + \frac{a^3}{y^3})V \text{ \&c.}$$
$$+ (\frac{y}{a} - \frac{a}{y})P + (\frac{yy}{aa} - \frac{aa}{yy})R + (\frac{y^3}{a^3} - \frac{a^3}{y^3})T \text{ \&c.}$$

quæ æquationes a fractionibus liberatæ dabunt has æquationes rationales ordinis indefiniti n

I.

$$0 = a^n y^n M + a^{n-1} y^{n+1}(P+Q) + a^{n-2} y^{n+2}(R+S) + a^{n-3} y^{n+3}(T+V) \&c. \\ + a^{n+1} y^{n-1}(P-Q) + a^{n+2} y^{n-2}(R-S) + a^{n+3} y^{n-3}(T-V) \&c.$$

II.

$$0 = a^n y^n N + a^{n-1} y^{n+1}(P+Q) + a^{n-2} y^{n+2}(R+S) + a^{n-3} y^{n+3}(T+V) \&c. \\ - a^{n+1} y^{n-1}(P-Q) - a^{n+2} y^{n-2}(R-S) - a^{n+3} y^{n-3}(T-V) \&c.$$

389. In formulis vero $(y^n + \frac{a^{2n}}{y^n})P$, & $(y^n - \frac{a^{2n}}{y^n})Q$ loco n quoque numeros fractos scribere licet. Quare, si pro n scribantur numeri $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, &c. ex æquationibus generalibus hinc oriundis irrationalitas sponte evanescet: habebitur enim

$$0 = \frac{y+a}{\sqrt{ay}} P + \frac{y^3+a^3}{ay\sqrt{ay}} R + \frac{y^5+a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} T + \&c. \\ + \frac{y-a}{\sqrt{ay}} Q + \frac{y^3-a^3}{ay\sqrt{ay}} S + \frac{y^5-a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} V + \&c.$$

vel hæc æquatio

$$0 = + \frac{y+a}{\sqrt{ay}} Q + \frac{y^3+a^3}{ay\sqrt{ay}} S + \frac{y^5+a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} V + \&c. \\ + \frac{y-a}{\sqrt{ay}} P + \frac{y^3-a^3}{ay\sqrt{ay}} R + \frac{y^5-a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}} T + \&c.$$

quæ a fractionibus liberatæ abeunt in has

$$0 = + a^n y^{n+1}(P+Q) + a^{n-1} y^{n+2}(R+S) + a^{n-2} y^{n+3}(T+V) \&c. \\ + a^{n+1} y^n(P-Q) + a^{n+2} y^{n-1}(R-S) + a^{n+3} y^{n-2}(T-V) \&c.$$

&

$$0 = + a^n y^{n+1}(P+Q) + a^{n-1} y^{n+2}(R+S) + a^{n-2} y^{n+3}(T+V) \&c. \\ - a^{n+1} y^n(P-Q) - a^{n+2} y^{n-1}(R-S) - a^{n+3} y^{n-2}(T-V) \&c.$$

390. Ex

390. Ex his quatuor æquationibus jam ex ſingulis Linearum ordinibus eæ, quæ problema reſolvant, facile invenientur. Ac primo quidem, ex primo ordine ſatisfacit Linea recta Axi AP parallela ac per punctum B tranſiens. Ex ordine ſecundo binæ æquationes priores, faciendo $n = 1$, dant $\alpha a x' y + yy - aa = 0$, quæ ex ſecunda naſcitur, ponendo $N = \alpha x$, & $P = 1$, & $Q = 0$. Prima enim nullam dat Lineam curvam; binæ poſteriores æquationes dant, faciendo $n = 0$, $y(\alpha + \beta x) \pm a(\alpha - \beta x) = 0$. Ex ordine tertio binæ æquationes priores dant, faciendo $n = 1$. CAP. XVI.

$$0 = ay(\alpha + \beta xx) + yy(\gamma + \delta x) + aa(\gamma - \delta x)$$

&

$$0 = \alpha ayx + yy(\gamma + \delta x) - aa(\gamma - \delta x)$$

binæ autem æquationes poſteriores dant, ponendo $n = 0$, & $n = 1$

$$0 = y(\alpha + \beta x + \gamma xx) \pm a(\alpha - \beta x + \gamma xx)$$

&

$$0 = ay^2(\alpha + \beta x) + y^3 \pm a^2 y(\alpha - \beta x) \pm a^3$$

ſimilique modo ex ſequentibus ordinibus omnes Lineæ quæſito ſatisfacientes reperientur.

 CAPUT

LIB. II.

CAPUT XVII.

De inventione Curvarum ex aliis proprietatibus.

391. Quæſtiones, quas in præcedente Capite reſolvimus, ita erant comparatæ, ut ad æquationem inter Coordinatas, ſive rectangulas ſive obliquangulas, facile revocari poſſent. Nunc igitur ejuſmodi proprietates contemplemur, quæ non immediate Applicatas inter ſe parallelas reſpiciant; veluti, ſi rectarum ex dato quodam puncto ad Curvam eductarum indoles quæpiam proponatur. Sit C punctum, unde rectæ ad Curvam educantur CM, CN, atque proprietas quæpiam has rectas reſpiciens fuerit propoſita: conveniet a modo hactenus uſitato naturam Curvarum per Coordinatas exprimendi, ita recedere, ut iſtæ rectæ in æquationem introducantur.

TAB. XX. *Fig.* 81.

392. Cum igitur pluribus aliis modis naturæ Linearum æquationibus comprehendi queant, quæ inter duas variabiles formentur, in præſenti negotio quantitas rectæ CM ex dato puncto C ad Curvam eductæ alterius variabilis locum ſuſtineat. Tum vero alia opus erit variabili, qua ſitus rectæ CM definiatur; hunc in finem aſſumatur recta quæpiam CA per punctum C ducta pro Axe, atque angulus ACM, ſeu quantitas ab hoc angulo pendens, commodiſſime vicem alterius variabilis tenebit. Sit ergo recta $CM = z$, & angulus $ACM = \phi$, cujus ſinus, tangensve in æquationem ingrediatur; atque manifeſtum eſt, ſi detur æquatio quæcunque inter z & $\mathit{ſin}.\phi$, ſeu $\mathit{tang}.\phi$, per eam Curvæ AMN naturam determinari, pro quovis enim angulo ACM, definitur longitudo rectæ CM ſicque punctum Curvæ M determinatur.

393. Diligentius autem perpendamus hunc Lineas curvas exprimendi modum. Ac primo quidem æquetur diſtantia z Functioni cuicunque ſinus anguli ϕ; quæ Functio ſi fuerit uniformis,

formis, videatur recta CM Curvæ in unico puncto M occurrere, quia angulo $ACM = \phi$ unicus valor rectæ CM respondet. Verum, si angulus ϕ duobus rectis augeatur, eadem manebit rectæ CM per punctum C ductæ positio, hoc tantum discrimine quod in plagam oppositam dirigatur; sicque alia ejusdem rectæ CM intersectio cum Curva prodibit, etiamsi z æquetur Functioni uniformi sinus anguli ϕ. Scilicet, sit P Functio illa sinus anguli ϕ, ita ut sit $z = P$, unde oriatur punctum Curvæ M; augeatur nunc angulus ϕ duobus rectis, seu ejus sinus statuatur negativus, quo facto abeat P in Q, ut sit $z = Q$; hinc ergo prodibit nova intersectio ejusdem rectæ CM productæ cum Curva m, sumendo $Cm = Q$.

CAP. XVII.

TAB. XX. Fig. 82.

394. Quamvis ergo P sit Functio uniformis sinus anguli ϕ, tamen recta CM, sub dato angulo $ACM = \phi$ per punctum C ducta, Curvæ in duobus punctis M & m occurret, nisi sit $Q = -P$. Quod si ergo unaquæque recta CM Curvæ in unico tantum puncto occurrere debeat, quantitatem illam P Functionem esse oportet imparem sinus anguli ϕ. Hoc idem autem usuvenit, si P fuerit Functio impar cosinus anguli ϕ. Quam ob rem omnes Curvæ, quas singulæ rectæ ex C eductæ in unico puncto intersecant, continebuntur in hac æquatione $z = P$; si quidem P fuerit Functio impar cum sinus tum cosinus anguli $ACM = \phi$.

395. Cum igitur Curvæ, quæ a rectis ex puncto C ductis in unico puncto secantur, contineantur in æquatione $z = P$, si P fuerit Functio impar sinus & cosinus anguli ϕ, seu ejusmodi Functio, quæ valorem negativum induat, si tam sinus quam cosinus anguli ϕ statuatur negativus, hinc facile pro hujusmodi Curvis æquatio inter Coordinatas orthogonales reperiri poterit. Demisso enim ex puncto M in Axem CA perpendiculo MP, si dicatur $CP = x$, $PM = y$, erit $\frac{y}{z} = \sin.\phi$ & $\frac{x}{z} = \cos.\phi$: unde, si P fuerit Functio impar ipsarum $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$, omnes istæ Curvæ continebuntur in hac

TAB. XX. Fig. 81.

LIB. II. æquatione $z = P$. A ſimpliciſſimis ergo incipiendo, erit

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y};$$

atque ad altiores poteſtates aſcendendo, erit

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y} + \frac{\varepsilon x^3}{z^3} + \frac{\zeta x^2 y}{z^3} + \frac{\eta x y^2}{z^3} + \frac{\theta y^3}{z^3} + \frac{\iota x x}{y z} + \frac{\kappa y y}{x z} + \frac{\lambda y z}{x x} + \&c.$$

396. Si hæc æquatio per z dividatur, ubique pares tantum ipſius z occurrent poteſtates: ideoque, cum ſit $z = \sqrt{(xx + yy)}$, eliminando z nulla irrationalitas in æquatione remanebit, prodibitque æquatio rationalis inter x & y. Æquatio ergo generalis ita erit comparata, ut unitas, ſeu quantitas conſtans, æquetur Functioni -1 dimenſionum ipſarum x & y. Cujuſmodi Functio ſi fuerit P, erit $C = P$; ideoque $\frac{1}{C} = \frac{1}{P}$; at $\frac{1}{P}$ erat Functio unius dimenſionis ipſarum x & y; unde, ſi Functio quæcunque unius dimenſionis ipſarum x & y æquetur conſtanti, æquatio erit pro Curva, quam rectæ per punctum C eductæ in unico puncto interſecant.

397. Sit P Functio n dimenſionum ipſarum x & y; & Q Functio $n+1$ dimenſionum; erit $\frac{Q}{P}$ Functio unius dimenſionis: ideoque omnes Curvæ, quas hic contemplamur, continebuntur in æquatione $\frac{Q}{P} = c$, ſeu $Q = cP$. Denotante ergo n numerum quemcunque, æquatio generalis pro his Curvis erit

$$\alpha x^{n+1} + \beta x^n y + \gamma x^{n-1} y^2 + \delta x^{n-2} y^3 + \varepsilon x^{n-3} y^4 + \&c.$$
$$= c\,(A x^n + B x^{n-1} y + C x^{n-2} y^2 + D x^{n-3} y^3 + \&c.)$$

Ex qua Lineæ ſingulorum ordinum, quæ a rectis ex puncto C eductis

eductis in unico tantum puncto secantur in sequentibus æquationibus continebuntur.

I.

$$\alpha x + \beta y = c$$

II.

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma yy = c(Ax + By)$$

III.

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3 = c(Ax^2 + Bxy + Cyy)$$

IV.

$$\alpha x^4 + \beta x^3 y + \gamma x^2 y^2 + \delta xy^3 + \varepsilon y^4 =$$
$$c(Ax^3 + Bx^2 y + Cxy^2 + Dy^3)$$

&c.

398. Primum ergo Linea recta satisfacit, quam utique constat ab aliis Lineis rectis per datum punctum ductis non nisi in uno puncto secari posse. Secunda æquatio est pro Sectionibus conicis generalis, dummodo Sectio conica per ipsum punctum C transeat, quæ intersectio, cum omnibus rectis ex C eductis communis sit, non computatur; quoniam ergo Sectiones conicæ a recta quacunque nonnisi in duobus punctis secari possunt, omnis recta per punctum C in ipsa Curva utcunque sumtum transiens unicam tantum præbebit intersectionem. Lineæ autem curvæ sequentium ordinum omnes per ipsum punctum C transeunt, quæ intersectio omnibus rectis per C ductis communis pariter non computatur. Atque idcirco ex altioribus ordinibus in æquationibus exhibitis eæ tantum continentur, quas rectæ per C ductæ in unico puncto intersecant. Sic igitur omnes enumeravimus Curvas algebraïcas, quæ a rectis per datum punctum C ductis nonnisi in unico puncto trajiciuntur.

399. Progrediamur jam ad eas Curvas investigandas quas singulæ rectæ per punctum C ductæ vel in duobus punctis intersecant, vel nusquam; si quidem radices æquationis duplicem intersectionem indicantis fiant imaginariæ. Cum igitur pro quovis angulo $ACM = \phi$, recta $CM = z$ duplicem sortiatur valorem, ea per æquationem quadraticam definietur. Sit

itaque

LIB. II. itaque $zz - Pz + Q = 0$: ubi P & Q sint Functiones anguli ϕ seu ejus sinus cosinusve. Quoniam vero recta CM Curvam nonnisi in duobus punctis M & N secare debet, non solum P & Q Functiones uniformes anguli ϕ esse oportet, sed etiam aucto angulo ϕ duobus rectis nullæ novæ intersectiones oriri debent: id quod evenit si P fuerit Functio impar sinus & cosinus anguli ϕ, ita ut valorem induat negativum, si sinus & cosinus negative accipiantur: Q autem esse debet Functio par ejusdem sinus & cosinus.

400. Positis autem Coordinatis orthogonalibus $CP = x$, & $PM = y$; erit $\frac{y}{z} = \sin.\phi$, & $\frac{x}{z} = \cos.\phi$; ideoque P debebit esse Functio impar ipsarum $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$; & Q Functio par ipsarum $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$. Ex his colligitur fore $\frac{P}{z}$ Functio rationalis ipsarum x & y, atque adeo Functio homogenea -1 dimensionum. Simili modo erit $\frac{Q}{zz}$ Functio rationalis ipsarum x & y homogenea -2 dimensionum. Quod si ergo fuerit L Functio homogenea $(n+2)$ dimensionum, M Functio homogenea $(n+1)$ dimensionum, atque N Functio homogenea n dimensionum quæcunque ipsarum x & y, fractio $\frac{M}{L}$ exhibebit Functionem convenientem pro $\frac{P}{z}$, & $\frac{N}{L}$ Functionem convenientem pro $\frac{Q}{zz}$. Quare, cum sit $zz - Pz + Q = 0$, erit $1 - \frac{P}{z} + \frac{Q}{zz} = 0$: unde æquatio generalis pro Curvis, quæ a rectis per punctum C ductis in duobus punctis secantur, erit $1 - \frac{M}{L} + \frac{N}{L} = 0$, seu $L - M + N = 0$; ubi est $P = \frac{Mz}{L}$ & $Q = \frac{Nzz}{L} = \frac{N(xx+yy)}{L}$; eritque adeo P Functio irrationalis ipsarum x & y, ob $z = \sqrt{(xx+yy)}$, & Q est Functio rationalis nullius dimensionis.

401. Hinc

401. Hinc jam facile erit ex quovis Linearum ordine eas exhibere, quæ a rectis per datum punctum C ductis in duobus punctis vel nusquam intersecentur. Pro secundo scilicet ordine fiat $n = 0$, ac prodibit æquatio generalissima Sectionum conicarum. CAP. XVII.

$$\alpha xx + \beta xy + \gamma yy - \delta x - \varepsilon y + \zeta = 0.$$

Puncto ergo C sumto ubicunque, omnis recta per id ducta Sectionem conicam vel in duobus punctis vel nusquam intersecabit. Interim tamen fieri potest, ut unaquæpiam recta Curvam in uno tantum puncto intersecet; quod, cum inter infinitas illas rectas per C ductas vel uni vel duabus tantum usuveniat, hac exceptio nullius erit momenti: quin etiam ita hoc paradoxon explicari potest, ut altera intersectio in infinitum abeat; quam ob causam ista exceptio nostro asserto nullam vim inferre censenda est.

402. Quo autem pateat quibus casibus ista exceptio locum habeat, æquationem inter x & y reducamus ad æquationem inter z & angulum $ACM = \phi$; quæ, ob $y = z.\sin.\phi$, & $x = z.\cos.\phi$, abibit in hanc

$$z^2(\alpha(\cos.\phi)^2 + \beta.\sin.\phi.\cos.\phi + \gamma(\sin.\phi)^2) - z(\delta.\cos.\phi + \varepsilon.\sin.\phi) + \zeta = 0:$$

ex qua patet, si fuerit coëfficiens ipsius z^2 æqualis nihilo, unicam tantum intersectionem locum habere; quod ergo evenit si fuerit $\alpha + \beta.\tang.\phi + \gamma(\tang.\phi)^2 = 0$. Quod si ergo hæc æquatio duas habeat radices reales, duobus casibus recta per C educta Curvam in unico tantum puncto secabit. Quoniam vero ejusdem æquationis radices indicant Asymtotas Curvæ, perspicuum est Hyperbolas a rectis alteri Asymtotæ parallelis in unico tantum puncto secari, cujusmodi rectæ per punctum C transeuntes duæ tantum dantur. In Parabola vero unica recta Axi parallela hanc exceptionem patietur. Verum si Sectio conica fuerit Ellipsis, ubicunque assumatur punctum

LIB. II. C, omnis recta per id ducta Curvam vel nusquam vel in duobus punctis secabit.

403. Lineæ tertii ordinis ista proprietate gaudentes, posito $n = 1$, continebuntur in hac æquatione

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3 - \varepsilon x^2 - \zeta x y - \eta y^2 + \theta x + \iota y = 0,$$

quæ quidem in se complectitur omnes Lineas tertii ordinis, quæ ergo omnes huc pertinent, dummodo punctum C in ipsa Curva capiatur. Facto enim $x = 0$, simul y valorem obtinet evanescentem. Simili modo pro Curvis quarti ordinis quæsito satisfacientibus punctum C non solum in Curva sed simul ejus punctum duplex esse debet; omnis ergo Linea quarti ordinis puncto duplici prædita quæsito satisfaciet, dummodo punctum C in puncto duplici statuatur. Sin autem C fuerit adeo Curvæ punctum triplex, tum omnis recta per id ducta Curvam in unico puncto intersecabit, pertinebitque ad casum primo consideratum. Pari modo Lineæ quinti ordinis satisfacient, si punctum C in earum puncto triplici statuatur, atque ita porro. Perpetuo autem notandum est, si recta per C ducta parallela fiat alicui Asymtotæ rectæ, seu Axi Asymtotæ parabolicæ, tum semper unicam dari intersectionem, altera in infinitum abeunte.

404. Egregie hæc conveniunt cum natura Linearum cujusque ordinis: quia enim Linea cujusque ordinis a Linea recta in tot punctis intersecari potest, quot exponens ordinis continet unitates, (atque revera in totidem punctis intersecatur, nisi aliquot intersectiones vel fiant imaginariæ vel in infinitum abeunt:) & quia hic omnes intersectiones, sive reales sive in infinito factas sive imaginarias, æque computamus, easque tantum excludimus quæ in ipso puncto C fiunt; manifestum est, cum Linea ordinis n in n punctis a quaque Linea recta secetur, punctum C in puncto totuplici, quot numerus $n - 2$ continet unitates, collocari debere, ut intersectio duplex prodeat.

405. His

405. His notatis facile erit problemata, quæ circa relationem inter quosque binos ipsius z valores CM & CN proponi solent, vel resolvere, vel solutionis inconvenientiam ostendere. Cum enim duo ipsius z valores CM & CN sint radices hujus æquationis $zz - Pz + Q = 0$, erit ipsorum summa $= P$, & rectangulum eorum $CM \cdot CN = Q$. Quare, si primum requirantur ejusmodi Curvæ, in quibus ubique sit summa $CM + CN$ constans, Functionem P quantitatem constantem esse oporteret. Cum autem ex quæstionis natura unaquæque recta per C ducta Curvæ in duobus tantum punctis occurrere debeat, necesse est ut sit $P = \frac{Mz}{L} = \frac{M\sqrt{(xx+yy)}}{L}$ (§. 399.), quæ quantitas irrationalitatem involvens nunquam constans esse potest. Atque idcirco nulla datur Curva huic quæstioni proprie satisfaciens.

Cap. XVII.

406. Quod si autem ista conditio, qua duæ tantum cujusque rectæ per C ductæ intersectiones cum Curva postulantur, omittatur atque ejusmodi quærantur Curvæ, quæ quidem plures duabus intersectiones exhibeant, inter eas autem duæ M & N ejusmodi adsint, ut sit $CM + CN$ quantitas constans, tales Curvæ innumerabiles exhiberi poterunt, ponendo $P =$ quantitati illi constanti $CM + CN = a$. Erit enim $zz - az + Q = 0$, denotante Q Functionem $\frac{Nzz}{L}$; & quia hæc æquatio adhuc irrationalitate laborat, ea sublata, erit $a^2z^2 = (zz + Q)^2$, seu $a^2 = zz(1 + \frac{N}{L})^2$, seu $a^2L^2 = (xx+yy)(L^2 + 2LN + NN)$, in qua erit L Functio homogenea $n+2$, at N Functio homogenea n dimensionum ipsarum x & y. Simplicissima ergo Curva hoc sensu quæstionem resolvens habebitur si ponatur $L = xx + yy$ & $N = \pm bb$, eritque $aa(xx+yy) = (xx+yy \pm bb)^2$, quæ est pro Linea quarti ordinis complexa; complectitur enim duos Circulos in C concentricos. Curvæ autem continuæ simplicissimæ quæsito satisfacientes erunt sexti ordinis, ponendo $L = \alpha xx + \beta xy +$

 γy^2,

LIB. II. γy^2, & $N = \pm bb$, pro quibus æquatio erit $aa(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy)^2 = (xx + yy)(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy \pm bb)^2$. Sit $\alpha = 1$, $\beta = 0$; & $\gamma = 0$, erit $yy + xx = \frac{aax^4}{x^4 \pm 2bbxx + b^4}$, seu $y = \frac{x\sqrt{(aaxx - x^4 \mp 2bbxx - b^4)}}{xx \pm bb}$.

407. Sin autem hujusmodi solutiones, quibus rectæ per C ductæ Curvam in pluribus quam duobus punctis intersecant, excludantur, quam conditionem natura quæstionis requirere videtur, nullæ prorsus Curvæ quæstioni satisfacere sunt dicendæ; ac propterea nulla dabitur Linea continua, quæ a rectis per C ductis ita in duobus tantum punctis M & N intersecetur, ut summa $CM + CN$ sit constans. At vero si istæ intersectiones hujus indolis postulentur, ut rectangulum $CM \times CN$ debeat esse constans, quæ proprietas in Circulum ita competit ut is satisfaciat ubicunque punctum C capiatur, infinitæ aliæ Lineæ curvæ inveniri poterunt, quæ idem præstent. Debebit enim Q esse quantitas constans, æqualis scilicet illi rectangulo $CM.CN$, quod sit $= aa$; quæ positio, cum sit $Q = \frac{Nzz}{L}$, ac proptera Functio rationalis ipsarum x & y, non pugnat.

408. Sit igitur $\frac{Nzz}{L} = aa$, seu $L = \frac{Nzz}{aa} = \frac{N(xx + yy)}{aa}$, atque Curvæ quæsito satisfacientes omnes continebuntur in hac æquatione $\frac{N(xx + yy)}{aa} - M + N = 0$, seu $Maa = N(xx + yy + aa)$, ubi M denotat Functionem quamcunque homogeneam $n + 1$ dimensionum, N vero Functionem homogeneam n dimensionum ipsarum x & y, ita ut sit $\frac{M}{N} = \frac{xx + yy + aa}{aa}$ Functio unius dimensionis ipsarum x & y. Hæc ergo æquatio omnes complectitur Curvas, quæ a rectis per C ductis in duobus tantum punctis M & N ita secantur, ut rectangulum $CM.CN$ sit ubique constans $= aa$.

409. Cum

409. Cum igitur $\frac{M}{N}$ ſit Functio homogenea unius dimenſionis ipſarum x & y, caſus ſimpliciſſimus prodibit ſi ponatur $\frac{M}{N} = \frac{\alpha x + \beta y}{a}$, ex quo orietur hæc æquatio $xx + yy - a(\alpha x + \beta y) + aa = 0$, quæ ſemper eſt pro Circulo: &, cum ſit æquatio pro Circulo generalis inter Coordinatas orthogonales, manifeſtum eſt Circulum quæſito ſatisfacere, ubicunque punctum C accipiatur, omnino uti ex Elementis conſtat. Præter Circulum ergo ex Sectionibus conicis nulla alia Curva huic quæſtioni ſatisfacit. Verum ex ſingulis ordinibus Linearum ſequentibus infinita Linearum ſatisfacientium copia exhiberi poteſt: & quidem omnes, quæ ex quolibet ordine ſatisfaciunt. Sic Lineæ tertii ordinis, quæ iſthac proprietate gaudent, continebuntur in hac æquatione CAP. XVII.

$$\frac{\alpha xx + \beta xy + \gamma yy}{a(\delta x + \varepsilon y)} = \frac{xx + yy + aa}{aa}$$

ſeu

$$(\delta x + \varepsilon y)(xx + yy) - a(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy) + aa(\delta x + \varepsilon y) = 0.$$

Atque ſimili modo ex omnibus ſequentibus Linearum ordinibus eæ, quæ ſatisfaciunt, exhibebuntur.

410. Propoſita jam ſit hæc quæſtio, ut inter omnes Lineas curvas, quæ a rectis per punctum C ductis in duobus punctis ſecantur, eæ definiantur, in quibus ſit ſumma quadratorum $CM^2 + CN^2$ quantitas conſtans, puta $= aa$. Cum igitur ſit $CM + CN = P$, & $CM \cdot CN = Q$, erit $CM^2 + CN^2 = PP - 2Q$; debebit ergo eſſe $PP - 2Q = 2aa$, ſeu $Q = \frac{PP - 2aa}{2}$. Quare, ob $P = \frac{Mz}{L}$, & $Q = \frac{Nzz}{L}$, erit $\frac{2Nzz}{L} = \frac{MMzz}{LL} - 2aa$; ideoque $N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz}$; quæ æquatio, cum ſit L Functio $n+2$ dimenſionum, M Functio $n+1$ dimenſionum, & N Functio n dimenſionum ipſarum x &

 y,

LIB. II. y, nullam implicat difficultatem. Sumtis ergo pro L & M ejusmodi Functionibus, erit $N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz}$: unde pro Curvis quæsito satisfacientibus ista resultat æquatio generalis

$$L - M + \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz} = 0,$$

seu

$$2LL(xx+yy) - 2LM(xx+yy) + MM(xx+yy) - 2aaLL = 0:$$

quæ, si sit $M = 0$, præbet Circulum cujus Centrum in C, quem quæsito satisfacere per se est perspicuum.

411. Ponamus $n + 1 = 0$, ut sit M quantitas constans $= 2b$, & $L = \alpha x + \beta y$, atque orietur Linea quarti ordinis hac æquatione contenta

$$(\alpha x+\beta y)^2(xx+yy-aa) - 2b(\alpha x+\beta y)(xx+yy)+2bb(xx+yy) = 0.$$

Alia æquatio quarti ordinis reperitur, si ponatur $L = xx+yy$ & $M = 2(\alpha x + \beta y)a$, tum enim æquatio per $2xx + 2yy$ divisa dabit

$$(xx+yy)^2 - 2a(\alpha x+\beta y)(xx+yy)+2aa(\alpha x+\beta y)^2 - aa(xx+yy) = 0.$$

Nisi autem divisio per $xx + yy$ succedat, æquatio inventa (ponendo $2M$ loco M), quæ est

$$LL(xx+yy) - 2LM(xx+yy) + 2MM(xx+yy) - aaLL = 0,$$

semper erit ordinis $2n + 6$, ideoque ex quolibet ordine pari obtinetur æquatio pro Curva satisfaciente. Præterea vero, si L per $xx+yy$ fuerit divisibilis; scilicet, si, denotante N Functionem quamcunque homogeneam n dimensionum ipsarum x & y, fuerit $L = (xx+yy)N$, orietur alia æquatio generalis hæc

$$NN(xx+yy)^2 - 2MN(xx+yy) + 2MM - aaNN(xx+yy) = 0,$$

quæ est ordinis $2n + 4$, ita ut ex singulis ordinibus paribus duplex nascatur æquatio pro Curvis proposita proprietate gaudentibus.

dentibus. Sic, ex ordine ſexto ſatisfacient Curvæ in his duabus æquationibus contentæ Cap. XVII.

$$(\alpha xx+\beta xy+\gamma yy)^2(xx+yy-aa)-2a(\delta x+\varepsilon y)(xx+yy)$$
$$(\alpha xx+\beta xy+\gamma yy-a(\delta x+\varepsilon y))=0,$$
&
$$(\delta x+\varepsilon y)^2(xx+yy)(xx+yy-aa)=$$
$$2a(\alpha xx+\beta xy+\gamma yy)((\delta x+\varepsilon y)(xx+yy)-a(\alpha xx+\beta yy+\gamma yy)).$$

In nullo ergo Linearum ordine impari ulla datur Linea hanc quæſtionem reſolvens.

412. Si jam non quærantur ejuſmodi Curvæ, in quibus ſit ſumma quadratorum CM^2+CN^2 conſtans, ſed in quibus ſit $CM^2+CM.CN+CN^2$ vel generaliter $CM^2+n.CM\times CN+CN^2$ quantitas conſtans; problema ſimili modo reſolutionem admittet. Cum enim ſit $CM^2+n.CM.CN+CN^2=P^2+(n-2)Q$, ponatur $P^2+(n-2)Q=aa$, eritque $Q=\frac{aa-PP}{n-2}$, quæ æquatio nullo incommodo laborat. Cum igitur ſit $P=\frac{Mz}{L}$, & $Q=\frac{Nzz}{L}$, erit $\frac{M^2z^2}{L^2}+\frac{(n-2)Nzz}{L}=aa$; ideoque $N=\frac{aaL}{(n-2)zz}-\frac{M^2}{(n-2)L}$. Quare, cum æquatio pro Curva ſit $L-M+N=0$, habebitur pro hac proprietate, qua $CM^2+n.CM.CN+CN^2$ debet eſſe conſtantis magnitudinis $=aa$, iſta æquatio

$$(n-2)LLzz-(n-2)LMzz+aaLL-M^2zz=0$$
ſeu, ob $zz=xx+yy$, erit
$$aaLL+(xx+yy)((n-2)L^2-(n-2)LM-M^2)=0,$$

exiſtente L Functione $m+2$, & M, $m+1$ dimenſionum ipſarum x & y. Sit N Functio quæcunque homogenea m dimenſionum, ac ponatur $L=(xx+yy)N$, prodibit alia æquatio generalis hæc

$$aa(xx+yy)N^2+(n-2)(xx+yy)^2N^2-(n-2)(xx+yy)MN-M^2=0.$$

413. Si

413. Si ſtatuatur $n = 2$, ut ſit $(CM + CN)^2 = aa$, fiet, vel $aaLL = (xx + yy)MM$, vel $MM = aa(xx + yy)N^2$. Utraque autem æquatio cum ſit homogenea, continebit duas pluresve æquationes hujus formæ $\alpha y = \beta x$; ideoque quæſito ſatisfieri non poterit niſi duabus pluribuſve rectis per punctum C ductis, quæ autem cum eo ſenſu, quo quæſtio proponitur, non ſatisfaciant, perſpicuum eſt hoc problema nullam admittere ſolutionem, uti ſupra jam notavimus: deberet enim eſſe $CM + CN =$ conſtanti a. Quod ſi vero ſtatuatur $n = -2$, ita ut quadratum differentiæ $(CN - CM)^2$, ideoque ipſa differentia MN deberet eſſe conſtans, orientur hæ duæ æquationes

$$aaLL = (xx + yy)(2L - M)^2$$

&

$$aa(xx + yy)NN = (2(xx + yy)N - M)^2$$

unde ſimpliciſſima ſolutio oritur, ſi ponatur $N = 1$ & $M = 2bx$; erit enim

$$aa(xx + yy) = 4(xx + yy - bx)^2,$$

ſeu, poſito $aa = 8cc$ erit,

$$(xx + yy)^2 = 2(cc + bx)(xx + yy) - bbxx.$$

Ergo $xx + yy = cc + bx \pm c\sqrt{(cc + 2bx)}$,

atque

$$y = \sqrt{(cc + bx - xx \pm c\sqrt{(cc + 2bx)})}.$$

414. Dantur ergo innumerabiles Lineæ curvæ, quæ a rectis per punctum C ductis ita in duobus punctis M & N ſecantur, ut intervallum MN perpetuo ſit conſtans. Ac primo quidem, patet huic conditioni ſatisfacere Circulum in C Centrum habentem, erit enim tum perpetuo intervallum $MN =$ Diametro Circuli; prodit autem Circulus ex æquationibus generalibus, ſi ponatur $M = 0$. Tum vero, poſt Circulum, ſatisfaciunt Lineæ quarti ordinis hac æquatione $aa(xx + yy) = 4(xx + yy - bx)^2$, atque hac $aaxx = (xx + yy)(2x - 2b)^2$, contentæ; ad quarum formam cognoſcendam expediet ad

æquationem

æquationem inter z & ang. Φ regredi. Cum igitur ſit $xx + yy = zz$, & $x = z.\cos.\Phi$, & $y = z.\sin.\Phi$, poſito $a = 2c$, erit primo CAP. XVII.

$$ccz z = (zz - bz.\cos.\Phi)^2$$

ſeu

$$b.\cos.\Phi \pm c = z.$$

tumque

$$cc(\cos.\Phi)^2 = (z.\cos.\Phi - b)^2$$

ſeu

$$z = \frac{b}{\cos.\Phi}$$

ex quibus facilis Curvarum conſtructio naſcitur.

415. Ad Curvam enim æquatione $z = b.\cos.\Phi \pm c$ contentam conſtruendam, per C ducatur recta ACB, in qua ſumatur $CD = b$, & ex D ſumatur utrinque $DA = DB = c$, erunt primo puncta A & B in Curva quæſita. Tum, ducta quavis recta NCM per C, ex D in eam demittatur perpendiculum DL, & ab L utrinque ſumatur $LM = LN = c$, erunt puncta M & N in quæſita Curva; ideoque perpetuo intervallum $MN = 2c$, uti quæſtio poſtulat. TAB. XX. Fig. 83, 84, 85.

Hic notandum eſt, ſi fuerit $CD = b$ minor quam c, Curvam in C habituram eſſe punctum conjugatum. Fig. 83.

Sin autem ſit $b = c$, Curva in C Cuſpide erit prædita, evaneſcente intervallo AC. Fig. 84.

Denique, ſi ſit b minor quam c, punctum A inter C & B cadet, Curvaque in C habebit nodum ſeu punctum duplex. Ceterum harum Curvarum Diameter erit recta ACB, & quæ huic normaliter inſiſtit ECF erit $= 2c$. Fig. 85.

416. Præter has Curvas in ſe redeuntes ex Linearum ordine quarto, etiam ſatisfaciunt ex eodem ordine aliæ in infinitum excurrentes, quæ hac æquatione $z = \frac{b}{\cos\Phi} \pm c$ continentur. Quarum conſtructio ita ſe habebit; ducta per C recta principali CAB, ſumatur $CD = b$, capiaturque $DA = DB = c$; erunt puncta A & B in Curva. Deinde, per D ducatur nor- TAB. XXI. Fig. 86.

LIB. II. malis EDF; & , acta recta quacunque CL, erit $CL = \frac{b}{cos.\Phi}$, vocato angulo $DCL = \Phi$. Tum perpetuo abscindatur $LM = LN = c$, atque puncta M & N determinabunt Curvam quaesitam. Ex hac autem constructione perspicuum est, Curvam sic descriptam esse *Conchoidem* Veterum, polum C habentem, & Asymtotam rectam EF, ad quam quatuor Curvae rami in infinitum convergunt. Vocatur autem portio hBh *Conchois exterior*, & gAg *interior*, praeter quas partes in C punctum existit conjugatum.

417. Hae Curvae ex Linearum ordine quarto satisfaciunt. Facile autem erit Curvas altiorum ordinum quot libuerit exhibere. Quod si enim fuerit P Functio impar sinus & cosinus anguli Φ, tum ista aequatio $z = bP \pm c$ praebebit Curvam continuam, quam omnes rectae per C ductae ita in duobus punctis M & N secabunt, ut intervallum MN futurum sit constans $= 2c$. Referri autem hae Curvae omnes poterunt ad genus Conchoidalium, loco rectae EF directricis substituendo Lineam quamcunque Curvam aequatione $z = bP$ contentam. Supra autem vidimus hanc aequationem in se complecti Lineas curvas, quae a rectis per punctum C ductis nonnisi in uno puncto secentur. Quare, ob intervallum c arbitrarium, ex unaquaque Curva $z = bP$ innumerabiles Curvae ad

TAB. XI. Fig. 87. praesens institutum accommodatae describi poterunt.

418. Sumatur scilicet pro lubitu Curva $CEDLF$, quae ab omnibus rectis per punctum C ductis in unicis tantum punctis D, L, secetur. Tum in his singulis rectis CL productis utrinque ab L capiantur intervalla aequalia $LM = LN = c$; eruntque puncta M & N in Curva quaesita. Sic igitur motu continuo describi poterit Curva $AMPCQBNRC$, quae a singulis rectis per C ductis in binis punctis M & N ita intersecabitur, ut intervallum MN sit perpetuo constans $= 2c$. Ubi notandum est, si Curva $CEDF$ fuerit Circulus per punctum C ductus, tum Curvam descriptam fore eandem Lineam quarti ordinis, quam primo invenimus §. 414.

419. Sic igitur satisfecimus quæstioni, qua quærebantur Lineæ curvæ AMN a rectis per punctum C ductis ita secandæ in duobus punctis M & N, ut esset $CN - CM$ seu $CM^2 - 2\,CM.CN + CN^2$ perpetuo quantitas constans. Paucis igitur adhuc evolvamus casum, quo $CM^2 + CM.CN + CN^2$ debet esse quantitas constans. In §. 412. ergo poni debet $n = 1$, sicque nascetur vel ista æquatio

CAP XVI — TAB XX Fig. 81

$$aaLL = (xx + yy)(L^2 - LM + M^2)$$

existente L Functione $m + 1$, & M Functione m dimensionum ipsarum x & y. Vel orietur hæc altera æquatio

$$aa(xx + yy)NN = (xx + yy)^2 NN - (xx + yy)MN + MM$$

in qua M est Functio homogenea una dimensione superior ipsarum x & y, quam Functio N.

420. Primum quidem perspicuum est, si ponatur $M = 0$, prodire Circulum, cujus Centrum in puncto C sit constitutum; qui, cum omnes rectæ ex C ad Curvam ductæ sint æquales, etiam omnibus hujus generis quæstionibus satisfacit. Pro præsenti autem casu post Circulum Curvæ simplicissimæ prodibunt, si in priori æquatione ponatur $M = b$ & $L = x$, eritque

$$aaxx = (xx + yy)(xx - bx + bb)$$

sive

$$yy = \frac{xx(aa - bb + bx - xx)}{bb - bx + xx}.$$

Quod si autem in altera æquatione ponatur $N = 1$, & $M = bx$, habebitur quoque Linea quarti ordinis

$$aa(xx + yy) = (xx + yy)^2 - bx(xx + yy) + bbxx,$$

seu

$$xx + yy = \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}aa \pm \surd\left(\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aabx - \frac{3}{4}bbxx\right)$$

quæ pariter, ac prior, quæstioni satisfaciet.

 421. His

LIB. II. 421. His expeditis quæstionibus, consideremus altiores potestates binorum ipsius z valorum ex æquatione $zz - Pz + Q = 0$, existente $P = \frac{Mz}{L}$ & $Q = \frac{Nzz}{L}$: ubi L Functionem homogeneam $n+2$; M, $n+1$ & N, n dimensionum ipsarum x & y significat; estque $x =$ Abscissæ CP & $y =$ Applicatæ PM. Proposita igitur sit quæstio, qua binæ intersectiones M & N ejus indolis requiruntur, ut sit $CM^3 + CN^3 = a^3$. Cum ergo sit, ex æquationis $zz - Pz + Q = 0$, natura, $CM^3 + CN^3 = P^3 - 3PQ$ debebit esse $P^3 - 3PQ = a^3$: quæ æquatio, cum P^3 & PQ sint quantitates irrationales, locum habere nequit. Huic ergo quæstioni in stricto sensu prorsus satisfieri non potest: sin autem numerus intersectionum non spectetur etiamsi duabus plures prodeant, tum quidem infinitis modis Curvæ satisfacientes inveniri possunt, ponendo $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$, & pro P capiendo Functionem quamcunque sinus & cosinus anguli $ACM = \phi$.

422. Sin autem ejusmodi Curvæ requirantur, in quibus sit $CM^4 + CN^4 = a^4$, tum poni debebit $P^4 - 4P^2Q + 2QQ = a^4$; quæ æquatio, cum nulla insit irrationalitas, nullam involvit contradictionem. Debebit ergo esse $Q = PP + \sqrt{(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)}$, quæ Functio, non obstante signo radicali, tanquam uniformis spectari potest, quia si $\sqrt{(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)}$ sumeretur negative, pro z valores imaginarii resultarent. Erit ergo $\frac{Nzz}{L} = \frac{MMzz}{LL} + \sqrt{(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4)}$; &, cum pro Curva sit $L - M + N = 0$, seu $zz - \frac{Mzz}{L} + \frac{Nzz}{L} = 0$, erit $zz - \frac{Mzz}{L} + \frac{MMzz}{LL} + \sqrt{(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4)} = 0$. Consequenter, sublata irrationalitate, erit

$\frac{z^4}{L^4}$

$$\frac{z^4}{L^4}(LL - LM + MM)^2 = \frac{M^4 z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4,$$

seu

$$(xx+yy)^2(2(LL - LM + MM)^2 - M^4) = a^4 L^4,$$

quæ omnes Curvas ſatisfacientes in ſe complectitur.

423. Alio faciliori modo, uti ſupra §. 372, hæc & ſimiles quæſtiones reſolvi poterunt. Cum enim ſit $CM \cdot CN = Q$, ſi altera ipſarum CM & CN dicatur $= z$, erit altera $= \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$, ob $Q = \frac{Nzz}{L}$. Quare, ſi debeat eſſe $CM^n + CN^n = a^n$; fiet $z^n + \frac{N^n z^n}{L^n} = a^n$; ideoque $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}$: quæ æquatio, ſi fuerit n numerus par, jam eſt rationalis quæſitoque ſatisfaciet. At, ſi ſit n numerus impar, ad irrationalitatem tollendam quadrata ſumi debent; quo ſit, ut numerus interſectionum duplicetur, ſicque Curva oriatur non eo ſenſu ſatisfaciens uti deſideratur. Sic, ſi debeat eſſe $CM^2 + CN^2 = a^2$, fiet $zz = xx + yy = \frac{aaLL}{LL + NN}$; quæ convenit cum ſupra inventa $xx + yy = \frac{aaLL}{(L-M)^2 + L^2}$, (410), ob $L - M + N = 0$. Generaliter ergo, ſi debeat eſſe $CM^n + CN^n = a^n$ fueritque n numerus par, obtinebitur iſta æquatio $z^n = (xx+yy)^{\frac{n}{2}} = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n} = \frac{a^n L^n}{L^n + (L-M)^n}$, exiſtentibus L Functione $m+2$ dimenſionum, M Functione $m+1$ dimenſionum, & N Functione m dimenſionum ipſarum x & y.

424. Hæc eadem ſolutio etiam ex conſideratione ſummæ $CM + CN = P$, eruitur. Si enim altera ipſarum CM &

 CN

LIB. II. CN ponatur $= z$, erit altera $= P - z$. Hinc, si $CM^n + CN^n$ debeat esse constans, erit $z^n + (P - z)^n = a^n$. Vidimus autem esse debere $P = \frac{Mz}{L}$, & $Q = \frac{Nzz}{L}$; ita ut sit $L - M + N = 0$; ex quo erit $z^n + \frac{z^n (M - L)^n}{L^n} = a^n$; seu $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + (M - L)^n}$, vel $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}$: vel, eliminando L, erit $z^n = \frac{a^n (M - N)^n}{(M - N)^n + N^n}$. Hæ æquationes, si fuerit n numerus par, conditionem propositam adæquate adimplent. At, si n sit numerus impar, dabuntur quidem duæ intersectiones M & N, ut sit $CM^n + CN^n = a^n$; at præter has habebuntur duæ aliæ intersectiones eadem proprietate gaudentes, ita ut quælibet recta per C ducta bis proprietatem propositam involvat.

425. His expositis, facile erit quæstiones alias maxime difficiles resolvere: debeat enim Curva inveniri quæ ab omnibus rectis per C ductis ita in duobus punctis M & N secetur, ut sit $CM^n + CN^n + \alpha CM . CN (CM^{n-2} + CN^{n-2}) + \beta . CM^2 . CN^2 (CM^{n-4} + CN^{n-4})$ &c. quantitas constans $= a^n$. Ponatur alter valor $CM = z$, erit alter $CN = \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$; quibus valoribus substitutis orietur ista æquatio, qua natura Curvæ exprimitur, $z^n (L^n + N^n + \alpha LN (L^{n-2} + N^{n-2}) + \beta L^2 N^2 (L^{n-4} + N^{n-4}) + \&c.)$

$= a$

$= a^n L^n$. Eſt autem $L - M + N = 0$, atque L, M, & N ſunt Functiones homogeneæ ipſarum x & y dimenſionum $m+2$, $m+1$ & m, uti ſupra deſcripſimus: unde erit, vel $L = M - N$, vel $N = M - L$ ſicque infinitæ ſolutiones hinc deducentur. CAP. XVII.

426. Pergamus jam ad Curvas inveſtigandas, quæ a ſingulis rectis per punctum fixum C ductis in tribus punctis ſecentur. Hujuſmodi ergo Curvarum natura exprimetur hac æquatione generali

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0:$$

ubi z denotat diſtantiam cujuſque Curvæ puncti a C; & P, Q, R ſunt Functiones anguli $ACM = \phi$, ejuſve ſinus & coſinus. Per eaſdem autem rationes quas ſupra allegavimus apparet, ne plures quam tres interſectiones prodeant, P & R eſſe debere Functiones impares ipſius $\sin.\phi$ & $\cos.\phi$; verum Q ſtatui debere Functionem parem. Quod ſi ergo ponantur Coordinatæ orthogonales $CP = x$, $PM = y$, ut ſit $xx + yy = zz$, atque denotent K, L, M & N Functiones homogeneas $(n+3)$, $(n+2)$, $(n+1)$ & n dimenſionum ipſarum x & y, fore $P = \frac{Lz}{K}$, $Q = \frac{Mzz}{K}$, & $R = \frac{Nz^3}{K}$: ideoque inter Coordinatas orthogonales x & y habebitur pro hujuſmodi Curvis iſta æquatio generalis

$$K - L + M - N = 0;$$

ex qua patet punctum C fore Curvæ punctum totuplex quot index n contineat unitates.

427. Primum ergo, huc pertinent omnes Lineæ tertii ordinis, ubicunque punctum C extra Curvam capiatur. Deinde, in hac æquatione continentur omnes Lineæ quarti ordinis, dummodo punctum C in ipſa Curva accipiatur. Tertio, omnes Lineæ quinti ordinis, in quibus datur punctum duplex huc referuntur, ſi modo punctum C in earum puncto duplici conſtituatur.

LIB. II. ſtituatur. Similique modo Lineæ altiorum ordinum hanc conditionem implebunt, ſi habeantur puncta multiplicia tanti exponentis, quot n contineat unitates, ſi $n+3$ exponat ordinem, ad quem æquatio pertineat.

428. Sint p, q, r tres illi valores ipſius z, quos obtinet ex æquatione $z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$, pro quovis valore anguli $CAM = \phi$; eritque, ex natura æquationum $P = p + q + r$; $Q = pq + pr + qr$ & $R = pqr$. Cum jam P & R per x & y rationaliter exprimi nequeant, manifeſtum eſt ejuſmodi Curvas exhiberi non poſſe, in quibus ſit vel $p + q + r$ vel pqr quantitas conſtans; neque adeo ulla Functio impar ipſarum p, q, & r conſtanti æqualis poni poterit. Pares autem Functiones ſine ulla difficultate conſtantem valorem obtinere poterunt. Sic, ſi requiratur ut ſit $pq + pr + qr = aa$, erit $Q = \frac{Mzz}{K} = aa$: ideoque $M(xx+yy) = aaK$; qui valor in æquatione $K - L + M - N = 0$, ſubſtitutus, dabit æquationem generalem omnes Curvas hac proprietate præditas in ſe complectentem:

$$M(xx+yy) - aaL + aaM - aaN = 0;$$

vel, eliminando M, hanc

$$(xx+yy)K - (xx+yy)L + aaK - (xx+yy)N = 0.$$

429. Pari modo, aliæ ſimiles quæſtiones facile reſolventur. Uti, quæratur Curva, quæ a rectis per C ductis ita in tribus punctis ſecetur, ut ſit $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$. Cum enim ſit $p^2 + q^2 + r^2 = P^2 - 2Q$, & $P = \frac{Lz}{K}$ atque $Q = \frac{Mzz}{K}$, fiet $\frac{L^2z^2}{K^2} - \frac{2Mzz}{K} = aa$, ſeu $(xx+yy)L^2 - 2(xx+yy)KM = aaKK$. At, pro Curvis tres interſectiones admittentibus habetur hæc æquatio generalis $K - L + M - N = 0$, cujus natura in hoc conſiſtit ut maximus ipſarum x & y dimenſionum

numerus

numerus ternario ſuperet minimum. Quo igitur hujuſmodi obtineatur æquatio, ſimulque ſit $(xx+yy)L^2 - 2(xx+yy)KM = aaKK$, multiplicetur illa æquatio per $2(xx+yy)K$, ut eliminari poſſit M, atque prodibit hæc æquatio generalis caſui propoſito ſatisfaciens CAP. XVII.

$$2(xx+yy)KK - 2(xx+yy)KL + (xx+yy)L^2 - aaKK - 2(xx+yy)KN = 0.$$

Membrum enim, in quo plurimæ inſunt dimenſiones, eſt $2(xx+yy)KK$, continetque $2n+8$ dimenſiones ipſarum x & y; atque membrum infimum eſt $2(xx+yy)KN$, & continet $2n+5$ dimenſiones, uti natura rei poſtulat.

430. Quoniam ergo neque ſummum neque imum membrum evaneſcere poteſt, ponamus, ad Curvam ſimpliciſſimam inveniendam, $n=0$; ſitque $N=b^3$, $K=x(xx+yy)$, & $L=0$, atque prodibit hæc æquatio

$$2(xx+yy)^3x^2 - aax x(xx+yy)^2 - 2b^3x(xx+yy)^2 = 0,$$

quæ per $2x(xx+yy)^2$ diviſa præbet hanc

$$x(xx+yy) - \frac{1}{2}aax - b^3 = 0,$$

quæ pertinet ad ordinem tertium. Sin autem non ſit $L=0$, ſed $L=2c(xx+yy)$, prodibit æquatio ordinis quarti

$$xx(xx+yy) - 2cx(xx+yy) + 2cc(xx+yy) - \frac{1}{2}aaxx - b^3x = 0,$$

ſeu

$$xx(xx+yy) + (2c-x)^2(xx+yy) = aaxx + 2b^3x.$$

Simili autem modo ex altioribus ordinibus plurimæ aliæ Curvæ quæſtioni ſatisfacientes eruentur.

431. Deinde, etiam Curvæ inveniri poterunt eæ in quibus ſit $p^4+q^4+r^4$ quantitas conſtans. Cum enim ſit $p^4+q^4+r^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR$, poni debebit $P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR = c^4$.

Erit ergo

$$z^4(L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2 + 4K^3LN) = c^4K^4:$$

ideoque

$$4K^3LNz^4 = c^4K^4 - z^4(L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2),$$

 unde

LIB. II. unde valor ipsius N in æquatione $K - L + M - N = 0$, substitutus dabit æquationem generalem pro Curvis huic conditioni satisfacientibus.

432. Poterit autem simul & huic conditioni $p^4 + q^4 + r^4 = c^4$, & præcedenti $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$ satisfieri. Per hanc enim esse debet $zzL^2 - 2zzKM = aaKK$; unde fit $2zzKM = zzL^2 - aaKK$.

Deinde, cum sit

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 - L^4z^4 + 4KL^2Mz^4 - 2K^2M^2z^4$$

erit

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 + L^4z^4 - 2aaK^2L^2z^2 - 2K^2M^2z^4$$

&

$$4K^2LMz^4 = 2KL^3z^4 - 2aaK^3Lzz.$$

Substituantur hi valores loco M & N in æquatione $K - L + M - N = 0$, seu $4K^3Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 4K^2LMz^4 - 4K^2LNz^4 = 0$, atque prodibit hæc æquatio pro Curva

$$4K^3Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 2KL^3z^4 - 2a^2K^3Lzz - c^4K^4 - L^4z^4 + 2a^2K^2L^2zz + 2K^2M^2z^4 = 0.$$

At, ob

$$KMzz = \frac{1}{2}L^2zz - \frac{1}{2}aaKK$$

erit

$$2K^2M^2z^4 = \frac{1}{2}L^4z^4 - aaK^2L^2zz + \frac{1}{2}a^4K^4,$$

ideoque pro Curvis quæsitis habebitur hæc æquatio generalis

$$8K^3Lz^4 - 8K^2L^2z^4 + 4KL^3z^4 - 4a^2K^3Lzz - 2c^4K^4 - L^4z^4 + 2a^2K^2L^2zz + a^4K^4 = 0.$$

433. Quia K debet esse Functio homogenea ipsarum x & y una dimensione altior quam L, Curva simplicissima in qua tres intersectiones exhibeant simul $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$, & $p^4 + q^4 + r^4 = c^4$ prodibit, si ponatur $K = zz$, & $L = bx$; erit ergo

$8bxz^5$

$$8bxz^6 - 8bbxxz^4 + 4b^3x^3z^2 - 4a^2bxz^4 - 2c^4z^4 - b^4x^4 + 2a^2b^2x^2z^2 + a^4z^4 = 0,$$

quæ, ob $zz = xx + yy$, eſt rationalis, præbetque Lineam ordinis ſeptimi, cujus C eſt punctum quadruplex. Alia autem Linea ſeptimi ordinis ſatisfaciens obtinebitur, ſi ponatur $K = x$, & $L = b$; erit enim

$$8bx^3z^4 - 8bbxxz^4 + 4b^3xz^4 - 4aabx^3zz - 2c^4x^4 - b^4z^4 + 2aabbxxzz + a^4x^4 = 0,$$

ſeu

$$z^4 = \frac{4aabx^3zz - 2aabbxxzz + 2c^4x^4 - a^4x^4}{8bx^3 - 8bbxx + 4b^3x - b^4}.$$

Unde fit

$$zz = \frac{2aabx^3 - aabbxx \pm xx\sqrt{(2bx-bb)(2c^4(bb-2bx+4xx)-2a^4(bb-2bx+2xx))}}{b(2x-b)(4xx-2bx+bb)}.$$

434. Jam ulterius progredi liceret ad Curvas, quæ a rectis per punctum C ductis in quatuor punctis interſecentur; atque ex iis illæ inveniri poſſent, quæ datis proprietatibus ſint præditæ. Verum, ſi ad præcepta in præcedentibus tradita attendamus, nulla prorſus ſupererit difficultas, omniaque, quæ in hoc genere deſiderari poterunt, ſine ullo fere labore vel expedientur, vel, niſi quæſtio ſolutionem genuinam admittat, hoc ipſum ſtatim cognoſcetur. Quam ob rem huic materiæ amplius non immorabor, ad aliud argumentum ad cognitionem Linearum curvarum pertinens progreſſurus.

Lib. II.

CAPUT XVIII.

De Similitudine & Affinitate Linearum curvarum.

435. IN omni æquatione pro Linea curva, præter Coordinatas orthogonales x & y, inesse debent quantitates constantes, vel una vel plures, uti a, b, c, &c.; quibus Lineæ constantes designantur, & quæ cum variabilibus x & y ubique eundem Linearum dimensionum numerum constituunt: Si enim in uno termino extet productum ex n Lineis in se invicem multiplicatis, necesse est ut in singulis reliquis terminis totidem Lineæ in se invicem multiplicentur, quoniam alias quantitates heterogeneæ inter se comparari deberent, quod fieri non potest. Quocirca in omni æquatione pro Linea curva Lineæ constantes a, b, c, &c., cum variabilibus x & y ubique eundem dimensionum numerum constituent, nisi forte Linea quæpiam constans unitate vel alio numero absoluto exprimatur. Hoc igitur notato, si nullæ Lineæ constantes in æquatione inessent, tum variabiles x & y solæ ubique eundem dimensionum numerum adimplerent, ideoque Functionem homogeneam constituerent. Supra autem jam vidimus hujusmodi æquationem ad Lineam curvam non pertinere, sed aliquot rectas se invicem in eodem puncto intersecantes exhibere.

436. Contemplemur igitur æquationem in qua, præter binas vatiabiles x & y, unica insit Linea constans a; ita ut tres Lineæ a, x, & y ubique in æquatione eundem dimensionum numerum constituant. Hujusmodi ergo æquatio, prout Lineæ constanti a alii atque alii valores tribuantur, infinitas producet Lineas curvas, quæ tantum quantitate a se invicem discreparent, ceterum vero omnino similes inter se sint futuræ. Omnes ergo Lineæ curvæ, quæ hoc modo in eadem æquatione comprehenduntur, merito ad idem genus referuntur atque inter se

similes

ſimiles eſſe cenſentur, neque aliud in illis deprehendetur diſcrimen, niſi quod in Circulis diverſæ magnitudinis ineſſe intelligitur. CAP. XVIII

437. Quo hæc ſimilitudo melius percipiatur, conſideremus æquationem determinatam, præter variabiles x & y, unicam Lineam conſtantem a, quam *Parametrum* vocare liceat, continentem, hanc

$$y^3 - 2x^3 + ayy - aax + 2aay = 0.$$

Sit AC valor Parametri a; atque, exiſtente $AC = a$, ſit AMB Linea curva hac æquatione contenta, ſumta recta AB pro Axe, vocatiſque Coordinatis $AP = x$ & $PM = y$. Tribuatur jam Parametro a quicunque alius valor $ac = a$, ſitque amb Linea curva, quam nunc illa æquatio præbet; eruntque hæ Lineæ curvæ AMB & amb inter ſe ſimiles. Quod ſi enim maneat $AC = a$, $AP = x$, $PM = y$, atque ſit $ac = \frac{1}{n} AC = \frac{a}{n}$; tum vero capiatur $ap = \frac{1}{n} AP = \frac{x}{n}$, erit $pm = \frac{1}{n} PM = \frac{y}{n}$; namque ſi in illa æquatione, loco a, x, & y, ſcribantur reſpective $\frac{a}{n}$, $\frac{x}{n}$, & $\frac{y}{n}$, ob omnes terminos per n^3 diviſos, eadem ipſa reſultabit æquatio. TAB. XXI. Fig. 88. TAB. XXI. Fig. 89.

438. Curvæ ergo ſimiles hanc habebunt proprietatem, ex qua ſimilitudinis natura eo luculentius apparebit, ut ſumtis Abſciſſis AP, ap in ratione Parametrorum AC & ac Applicatæ PM & pm ſimul eandem habituræ ſint rationem: ſcilicet, ſi ſumatur $AP : ap = AC : ac$, tum quoque erit $PM : pm = AC : ac$. Cum ergo ſit $AP : PM = ap : pm$, hæ Curvæ in ſenſu geometrico inter ſe erunt ſimiles, atque, quantitate excepta, iiſdem prorſus affectionibus gaudebunt. Sumtis nimirum Abſciſſis AP, ap homologis ſeu Parametris AC & ac proportionalibus, non ſolum Applicatæ PM &

 pm

 pm rationem tenebunt Parametrorum ſed etiam omnes aliæ Lineæ ſimiliter ductæ, quin etiam Curvarum arcus AM & am erunt ut AC & ac. Tum vero etiam Areæ ſimiles APM & apm erunt in ratione duplicata, ſeu ut AC^2 ad ac^2. Atque, ſi ſumantur duo puncta homologa O & o quæcunque, ita ut ſit $AO : ao = AC : ac$, ex iiſque ſub æqualibus angulis AOM, aom ad Curvas rectæ ducantur OM & om, erit quoque $OM : om = AC : ac$. Ob ſimilitudinem denique etiam Tangentes in punctis homologis M & m ad Axem æqualiter inclinabuntur, atque adeo radii oſculi ibidem tenebunt rationem Parametrorum AC & ac.

439. Hinc patet omnes Circulos eſſe figuras ſimiles, quæ continentur æquatione $yy = 2ax - xx$; parique modo omnes Curvæ æquatione $yy = ax$ contentæ, hoc eſt omnes Parabolæ, erunt inter ſe figuræ ſimiles. Ex hujuſmodi autem æquationibus, quibus Curvas ſimiles contineri vidimus, quia Coordinatæ x & y cum Parametro a ubique eundem conſtituunt dimenſionum numerum, ſi valor ipſius y definiatur, reperietur is æqualis Functioni homogeneæ unius dimenſionis ipſarum a & x. Viciſſim ergo, ſi denotet P Functionem homogeneam unius dimenſionis ipſarum a & x, æquatio $y = P$ innumerabiles continebit Curvas ſimiles, quæ oriuntur, ſi Parametro a ſucceſſive alii atque alii valores tribuantur. Simili autem modo ex hujuſmodi æquatione pro Curvis ſimilibus Abſciſſa x æquabitur Functioni unius dimenſionis ipſarum a & y, atque ipſa Parameter a æqualis erit Functioni unius dimenſionis ipſarum x & y.

440. Data autem Curva quacunque AMB, infinitæ aliæ ipſi ſimiles amb per facilem praxin deſcribi poſſunt. Sumatur enim ratio quæcunque, quam latera homologa Curvæ datæ & deſcribendæ inter ſe tenere debeant, quæ ſit $1 : n$; atque, ſi Curva data AMB referatur ad Axem AB per Coordinatas normales AP & PM, ſuper Axe ſimili ab capiatur Abſciſſa ap, ut ſit $AP : ap = 1 : n$, & ex p erigatur Applicata normalis pm, ut ſit pariter $PM : pm = 1 : n$, eritque punctum m in

Curva

Curva ſimili amb, ita ut puncta M & m ſint homologa. Vel, deſcriptio quoque ex puncto quocunque fixo O abſolvi poterit; ſumto enim in Curva deſcribenda puncto ſimili fixo o, fiat perpetuo angulus aom æqualis angulo AOM, & abſcindatur om, ut ſit $OM : om = 1 : n$, eritque punctum m pariter in Curva ſimili amb. Hoc itaque modo, pro quavis ratione $1 : n$ ad arbitrium aſſumta, Curva ſimilis deſcribi poterit. Solent autem in hunc finem confici inſtrumenta mechanica, quorum ope figuræ cujuſcunque magnitudinis, quæ ſint datæ ſimiles, delineari poſſunt. CAP. XVIII.

441. Quod ſi igitur natura Curvæ propoſitæ AM exprimatur æquatione quacunque inter Coordinatas $AP = x$, & $PM = y$, inde facili negotio reperietur æquatio pro Curva ſimili am. Sit enim Abſciſſa homologa $ap = X$ & Applicata $pm = Y$; erit ex conſtructione $x : X = 1 : n$ & $y : Y = 1 : n$; unde fit $x = \frac{X}{n}$ & $y = \frac{Y}{n}$. Hi ergo valores in æquatione in x & y data ſubſtituti producent æquationem inter X & Y pro Curvis ſimilibus. Si igitur in hac nova æquatione ſolæ Coordinatæ X & Y cum littera n dimenſiones conſtituere cenſeantur, numerus dimenſionum ubique erit nullus; vel, ſi æquatio, ad fractiones tollendas, multiplicetur per quampiam poteſtatem ipſius n, orietur æquatio, in qua tres hæ quantitates X, Y, & n ubique eundem dimenſionum numerum producant. Supra autem vidimus in omni æquatione pro Curvis ſimilibus ambas Coordinatas cum ea conſtante, cujus variatione Curvæ ſimiles exiſtunt, ubique eundem dimenſionum numerum conſtituere; quod igitur eſt criterium æquationum Curvas ſimiles continentium.

442. Quemadmodum in Curvis ſimilibus Abſciſſæ & Applicatæ homologæ in eadem ratione ſive augentur ſive diminuuntur; ita, ſi Abſciſſæ aliam ſequantur rationem, aliam vero Applicatæ, Curvæ non amplius orientur ſimiles. Verum tamen, quia Curvæ hoc modo ortæ inter ſe quandam Affinitatem tenent, has Curvas *affines* vocabimus: complectitur ergo

Affinitas

LIB. II. Affinitas ſub ſe ſimilitudinem tanquam ſpeciem: quippe Curvæ affines in ſimiles abeunt, ſi ambæ illæ rationes, quas Abſciſſæ & Applicatæ ſeorſim ſequuntur, evadant æquales. Ex Curva ergo quacunque data AMB innumerabiles Curvæ affines amb reperientur hoc modo; ſumatur Abſciſſa ap, ita ut ſit $AP : ap = 1 : m$; tum conſtituatur Applicata pm, ut ſit $PM : pm = 1 : n$; ſicque, mutando harum rationum $1 : m$ & $1 : n$, vel alterutram vel utramque, innumerabiles prodibunt Curvæ, quæ primæ AMB erunt affines.

TAB. XXI. Fig. 88. & 89.

443. Exprimatur natura Curvæ datæ AMB æquatione quacunque inter Coordinatas orthogonales $AP = x$, & $PM = y$; atque in Curva affini amb modo præcedente deſcripta ponatur Abſciſſa $ap = X$, & Applicata $pm = Y$, ob $x : X = 1 : m$, & $y : Y = 1 : n$, erit $x = \frac{X}{m}$ & $y = \frac{Y}{n}$. Quod ſi ergo hi valores in æquatione inter x & y data ſubſtituantur, proveniet æquatio generalis pro Curvis affinibus inter X & Y. Ad hujus æquationis naturam penitius evolvendam, ponamus æquationem pro Curva data AMB ita eſſe conformatam, ut Applicata y æquetur Functioni cuicunque ipſius x, quæ ſit $= P$, ſeu eſſe $y = P$. Si igitur in P loco x ſubſtituatur $\frac{X}{m}$, fiet P Functio nullius dimenſionis ipſarum X & m; ideoque æquatio generalis pro Curvis affinibus ita erit comparata, ut $\frac{Y}{n}$ æquetur Functioni nullius dimenſionis ipſarum X & m; ſeu, quod eodem redit, Functio nullius dimenſionis ipſarum Y & n æquabitur Functioni nullius dimenſionis ipſarum X & m.

444. Diſcrimen autem inter Curvas ſimiles & affines hoc potiſſimum eſt notandum, quod Curvæ, quæ ſunt ſimiles reſpectu unius Axis vel puncti fixi, eædem ſimiles ſint futuræ reſpectu aliorum quorumvis Axium ſeu punctorum homologorum. Curvæ autem, quæ tantum ſunt affines, tales tantum ſunt reſpectu eorum Axium, ad quos referuntur, neque pro lubitu alii Axes, ſeu puncta homologa, in ipſis dantur, ad

quæ

quæ affinitas referri possit. Ceterum vero, notandum est, uti omnes Curvæ similes ad eundem ordinem, atque adeo ad idem Linearum Genus referuntur, ita etiam Curvas affines semper in eodem Linearum ordine eodemque genere comprehendi. Quæ ut clarius percipiantur, similitudinem atque affinitatem nonnullis exemplis Curvarum notiorum illustrasse conveniet.

445. Sit igitur Curva data Circulus ad Diametrum relatus, cujus natura exprimitur æquatione $yy = 2cx - xx$. Ponatur $x = \frac{X}{n}$ & $y = \frac{Y}{n}$, atque æquatio inter X & Y resultans complectetur omnes Curvas similes; erit autem $\frac{Y^2}{n^2} = \frac{2cX}{n} - \frac{XX}{nn}$, seu, $Y^2 = 2ncX - XX$; ex qua patet omnes Curvas Circulo similes quoque esse Circulos, quorum Diametri $2nc$ utcunque discrepent. Ad Curvas autem Circulo affines inveniendas ponatur $x = \frac{X}{m}$ & $y = \frac{Y}{n}$, prodibitque $\frac{Y^2}{nn} = \frac{2cX}{m} - \frac{XX}{mm}$, seu $m^2Y^2 = 2mn^2cX - nnXX$, quæ est æquatio generalis pro Ellipsi ad alterum Axem principalem relata; unde intelligitur omnes Ellipses esse Lineas curvas Circulo affines. Quare, omnes Ellipses sunt quoque Curvæ inter se affines. Simili autem modo intelligetur, omnes Hyperbolas esse Curvas inter se affines. Ellipses autem, atque etiam Hyperbolæ, in quibus eadem ratio inter binos Axes principales intercedit, Curvæ erunt inter se similes.

446. Quod ad Parabolam æquatione $yy = cx$ expressam attinet, perspicuum quidem est omnes Curvas ipsi similes quoque esse Parabolas, atque adeo omnes Parabolas esse Curvas inter se similes. Quod si autem ad Curvas Parabolæ affines spectemus, posito $y = \frac{Y}{n}$ & $x = \frac{X}{m}$, prodibit æquatio $Y^2 = \frac{n^2c}{m}X$, quæ cum etiam sit pro Parabolis, manifestum est,

LIB. II. quæ Curvæ Parabolæ ſint affines, eaſdem ſimul Parabolæ eſſe ſimiles; ita ut hoc caſu ſimilitudo æque late pateat atque affinitas. Idem quoque evenit in omnibus Curvis, quarum natura exprimitur æquatione duobus tantum terminis conſtante, cujuſmodi ſunt $y^3 = ccx$; $y^3 = cxx$; $y^2x = c^3$; &c.; his nimirum Curvis, cum parabolicis tum hyperbolicis, quæ aliæ Curvæ ſunt affines eædem quoque ſunt ſimiles; quæ convenientia in Curvis alius generis non locum habet, uti jam de Circulo & Ellipſi notavimus.

447. Quemadmodum ex data æquatione inter x & y, quam quotcunque quantitates conſtantes a, b, c, &c. ingrediantur, ſi ſingulis conſtantibus determinati valores tribuantur, unica Linea curva determinata oritur; ita, ſi una conſtantium, puta a, mutabilis aſſumatur, eique ſucceſſive alii atque alii valores tribuantur, quia ex unoquoque valore peculiaris Curva naſcitur, omnino infinitæ Curvæ orientur, quæ erunt ſimiles ſi, præter a, nullæ aliæ Lineæ conſtantes æquationem ingrediantur; contra vero diſſimiles. Sin autem, præter a, alia quoque conſtans b mutabilis ſtatuatur; tum, ob mutabilitatem ipſius b, ex unoquoque ipſius a valore emergent Lineæ curvæ infinitæ, ſicque omnino ex mutabilitate duarum conſtantium a & b infinities infinitæ provenient Lineæ curvæ differentes. Si inſuper tertia conſtans c mutabilis aſſumatur, tum adhuc infinities plures reſultabunt Lineæ curvæ; ſicque quo major fuerit conſtantium, quæ mutabiles ſtatuuntur, numerus, eo majore infiniti poteſtate numerus Curvarum reſultantium exprimetur.

448. Conſideremus autem aliquanto diligentius eas Lineas curvas infinitas, quæ ex una æquatione prodeunt, dum tantum una Linearum conſtantium mutabilis aſſumitur. Hujuſmodi autem æquatio, ſi idem Axis idemque Abſciſſarum initium retineatur, non ſolum Lineas illas curvas infinitas exhibet, ſed etiam earum poſitionem indicat, ita ut his Curvis infinitis ſpatium quodpiam impleatur, in quo nullum aſſignari queat punctum, quin per id aliqua infinitarum Curvarum tranſeat.

eat. Prout ergo æquatio fuerit comparata, Curvæ illæ infinitæ vel erunt dissimiles vel similes, uti ex præcedentibus judicare licet; quin etiam evenire potest, ut omnes Curvæ sint inter se non solum similes sed etiam æquales, ratione situs tantum differentes. Sic ista æquatio $y = a + \sqrt{(2cx - xx)}$, posita a mutabili, exhibebit infinitos Circulos æquales radii $= c$, quorum centra sunt in recta ad Axem normali sita. CAP. XVIII.

449. Hinc etiam vicissim, si una eademque Curva super plano in infinitis diversis sitibus secundum certam legem describatur, æquatio præberi poterit, qua per unius constantis mutabilitatem omnes hæ infinitæ Curvæ inter se æquales simul exhibeantur. Sit Curva infinitis variis sitibus exhibita Circulus cujus radius $= c$, qui ita infinities describatur, ut vertices A, a, datam Curvam $A a$ L, quæ *Directrix* vocetur, constituant; Diametri autem ab perpetuo Axi AB maneant parallelæ. Ad æquationem ergo pro his infinitis Circulis inveniendam, sumatur quodvis Directricis punctum a, unde in Axem principalem demittatur perpendiculum, aK. Ponatur $AK = a$; &, ob Directricem datam, dabitur Ka per a: sit ergo $Ka =$ A, eritque A Functio quæpiam ipsius a data. Tum ex a Axi principali ducatur parallela ab, quæ erit Diameter Circuli Verticem in Directricis puncto a habentis, ex cujus puncto quovis m ducatur Applicata $mP = y$, respondens Abscissæ $AP = x$; erit ergo $ap = x - a$, & $pm = y -$ A. Positis autem $ap = t$, & $pm = u$; erit, ex natura Circuli, $uu = 2ct - tt$; jam, ob $t = x - a$, & $u = y -$ A, habebitur $(y - \mathrm{A})^2 = 2c(x - a) - (x - a)^2$, quæ erit æquatio generalis omnes Circulos secundum Directricem AaL modo descripto dispositos complectens. Omnes scilicet isti Circuli ex æquatione inventa prodibunt, si Linea a, a qua simul A pendet, mutabilis assumatur. TAB. XXII. Fig. 90.

450. Simili modo si, loco Circuli, alia quæcunque Linea Curva amb ita promoveatur secundum ductum Directricis AaL, ut ejus Vertex seu Abscissarum initium a in Directrice, atque Axis ab sibi perpetuo parallelus maneat, eadem Linea

LIB. II. curva infinities descripta habebitur, atque æquatio inveniri poterit, qua omnium harum Linearum curvarum natura simul comprehendatur. Data sit natura hujus Curvæ promotæ per æquationem inter Coordinatas $ap = t$ & $pm = u$; ac, pro Axe principali, ad quem omnes Curvæ junctim consideratæ referantur, sumatur recta AB Axibus ab parallela, quæ simul sit Axis Directricis AaL. Posito jam, ut ante $AK = a$, & $Ka = \mathrm{A}$, ita ut A sit Functio quædam ipsius a, vocetur Abscissa $AP = x$, & Applicata $Pm = y$, erit $t = x - a$, & $u = y - \mathrm{A}$. Quod si ergo hi valores loco t & u in æquatione inter t & u data substituantur, obtinebitur æquatio generalis omnes Curvas amb conjunctim complectens. Quicunque enim valor determinatus ipsi a tribuatur, prodibit una quædam Curva amb ex infinitis quæ per hunc motum sunt descriptæ. Sic, si Curva amb fuerit Parabola æquatione $uu = ct$ expressa, tum infinitæ Parabolæ æquales, quarum Vertices per Directricem AaL sunt dispositi, Axesque rectæ AB paralleli, continebuntur in hac æquatione $(y - \mathrm{A})^2 = c(x - a)$.

451. Quemadmodum hic Verticem Curvæ A in data Curva Directrice ita promoveri posuimus, ut ejus Axis sibi semper maneret parallelus; ita etiam, dum Vertex per datam Curvam transfertur, positio Axis Curvæ ab utcunque variari poterit; sicque multo generalior obtinebitur æquatio pro eadem Curva in dato plano secundum quamcunque legem infinities descripta. Quod quo clarius expediamus, ponamus primum Verticem Curvæ A per circumferentiam Aa ita progredi, ut Axis Curvæ ab perpetuo ad Centrum Circuli O dirigatur. Motus igitur rotatorius Curvæ AMB cum Axe BAO circa punctum O factus exhibebit omnes istos infinitos ejusdem Curvæ AMB situs diversos quos omnes in una æquatione, quam constans quæpiam mutabilis posita ingrediatur, complecti oportet.

TAB. XXII. *Fig* 91.

452. Statuatur radius invariabilis $AO = aO = c$; sitque angulus $AOa = \alpha$, qui mutabilis assumitur: ex Curvæ in situ quocunque

quocunque amb descriptæ puncto quovis m ad rectam OAB pro Axe principali assumtam demittatur Applicata mP, sitque $OP = x$, & $Pm = y$. Tum ex m in proprium Curvæ amb Axem ab demittatur quoque perpendicularis mp: vocatisque $ap = t$, & $pm = u$, dabitur æquatio invariabilis inter t & u, qua natura Curvæ amb exprimitur. Ex P ducatur Ps ipsi Ob parallela, cui Applicata mp producta occurrat in s; eritque $ps = x.\mathit{fin}.\alpha$; $Op - Ps = x.\mathit{cof}.\alpha$; tum vero, ob angulum $Pms = AOa = \alpha$, erit $Ps = y.\mathit{fin}.\alpha$ & $ms = y.\mathit{cof}.\alpha$. Hinc erit $Op = c + t = x.\mathit{cof}.\alpha + y.\mathit{fin}.\alpha$ & $mp = u = y.\mathit{cof}.\alpha - x.\mathit{fin}.\alpha$ In æquatione ergo inter t & u data substituantur $t = x.\mathit{cof}.\alpha + y.\mathit{fin}.\alpha - c$ & $u = y.\mathit{cof}.\alpha - x.\mathit{fin}.\alpha$; prodibitque æquatio generalis inter Coordinatas x & y, quæ, angulo α mutabili assumto, omnes Curvas amb in se complectetur. CAP. XVIII.

453. Promoveatur nunc autem Vertex Curvæ AMB secundum Directricem quamcunque AaL, interea vero positio Axis ab continuo ita mutetur, ut angulus AOa quomodocunque pendeat a puncto a. Scilicet, Vertice in a versante, sit $AK = a$, & $Ka = \mathrm{A}$, atque angulus $AOa = \alpha$; ubi, ob Directricem datam, erit A Functio quædam cognita ipsius a: anguli α autem sinus cosinusve sit pariter Functio quæpiam ipsius a. His positis, erit $KO = \frac{\mathrm{A}}{tang.\,\alpha}$, & $Oa = \frac{\mathrm{A}}{\mathit{fin}.\,\alpha}$. Ex Curvæ amb puncto quocunque m primum ad Axem principalem AO demittatur perpendiculum mP, tum vero etiam in proprium Axem mp, sitque $AP = x$, $Pm = y$; & $ap = t$, $pm = u$, dabiturque æquatio invariabilis inter Coordinatas t & u, ex qua æquatio variabilis inter x & y omnes Curvas amb complectens definiri debet. TAB. XXII. Fig. 92.

454. Ad hoc præstandum ex P in mp productam ducatur normalis Ps, quæ erit Axi Curvæ abO parallela: atque, ob angulum $Pms = AOa = \alpha$, erit $Ps = y.\mathit{fin}.\alpha$ & $ms =$

 $y.\mathit{cof}.\alpha$.

LIB. II. $y.\cos.\alpha$. Deinde, ob $OP = a + \frac{A}{\text{tang.}\,\alpha} - x$, erit $ps = a.\sin.\alpha + A.\cos.\alpha - x.\sin.\alpha$, & $Op - Ps = a.\cos.\alpha + \frac{A.\cos.\alpha}{\text{tang.}\,\alpha} - x.\cos.\alpha$. Hinc erit $Op = a.\cos.\alpha + \frac{A.\cos.\alpha}{\text{tang.}\,\alpha} - x.\cos.\alpha + y.\sin.\alpha = \frac{A}{\sin.\alpha} - t$; ideoque $t = A.\sin.\alpha - a.\cos.\alpha + x.\cos.\alpha - y.\sin.\alpha$, & $u = - a.\sin.\alpha - A.\cos.\alpha + x.\sin.\alpha + y.\cos.\alpha$. Quam ob rem, si in æquatione inter t & u data substituantur,

$$t = (x - a).\cos.\alpha - (y - A).\sin.\alpha$$

&

$$u = (x - a).\sin.\alpha + (y - A).\cos.\alpha$$

orietur æquatio quæsita inter x & y. Quacunque ergo lege eadem Curva amb in plano infinities describatur, hoc modo invenietur æquatio generalis istas Curva omnes simul in se continens.

455. Hoc igitur modo in æquationem includuntur Curvæ numero infinitæ eædem, tantum ratione situs a se invicem discrepantes; si quidem æquatio, quæ inter t & u datur, fuerit invariabilis, neque constantem mutabilem a in se contineat. Quod si autem una pluresve constantes, quæ in æquatione inter t & u insunt, simul ab a pendere assumantur, tum obtinebuntur infinitæ Curvæ diversæ, sive similes sive dissimiles, eadem pariter æquatione contentæ: Similes scilicet erunt omnes Curvæ, si æquatio inter t & u ita fuerit comparata ut u æquetur Functioni cuicunque homogeneæ unius dimensionis ipsarum t & f, existente f quantitate utcunque ab a pendente; sin secus accidat, Curvæ erunt dissimiles.

TAB. XXII. Fig. 93. 456. Ut hoc argumentum Curvarum diversarum exemplo illustremus, ponamus infinitos describi Circulos AB, αB, amB per datum punctum B transeuntes, qui omnes Centra sua habeant sita in recta AE, cujusmodi Circulis in mappis geographicis meridiani repræsentari solent. Demittatur ex B perpen-

perpendiculum in rectam AC, fitque $BC = c$, quod intervallum est invariabile. Tum consideretur Circulus infinitorum descriptorum quicunque amB; unde una demissa Applicata mP, sit $CP = x$, & $Pm = y$, radius porro hujus Circuli, qui, etsi respectu ejusdem Circuli est constans, tamen respectu omnium est mutabilis, ponatur $aE = BE = a$: erit $CE = \sqrt{(aa - cc)}$ & $PE = x + \sqrt{(aa - cc)}$. Cum igitur sit $PE^2 + Pm^2 = aa$, erit $y^2 + x^2 + 2x\sqrt{(aa - cc)} + aa - cc = aa$; seu $yy = cc - 2x\sqrt{(aa - cc)} - xx$: sin autem intervallum CE loco constantis variabilis in æquationem introducatur, ponaturque $CE = a$, habebitur hæc æquatio aliquanto simplicior $yy = cc - 2ax - xx$, quæ, ob mutabilitatem ipsius a, omnes omnino Circulos per B ductos & Centra in recta AE habentes exhibebit. Simili vero modo Curvæ quæcunque infinitæ certa quadam lege dispositæ ad unam æquationem revocabuntur, dummodo discrimen inter constantes variabiles & invariabiles probe observetur. CAP. XVIII.

CAPUT XIX.

De intersectione Curvarum.

457. Quemadmodum Lineæ curvæ a rectis intersecentur, in præcedentibus Capitibus jam sæpius vidimus, ubi ostendimus Lineas secundi ordinis a rectis in pluribus quam duobus punctis secari non posse, Lineas autem tertii ordinis plures quam tres intersectiones, & quarti ordinis plures quam quatuor & ita porro non admittere. Cum igitur in hoc Capite constituerim intersectiones, quas duæ quævis Gurvæ inter se faciunt, definire, oportebit hanc tractationem a Lineis rectis inchoare, atque ipsa illa puncta indagare, in quibus recta quæpiam data Curvam datam trajicit. Hoc enim modo via parabitur ad intersectiones mutuas Linearum curvarum

Lib. II. rum determinandas, quod argumentum maximum usum habere solet in construendis æquationibus altiorum graduum, qua de re in sequenti Capite fusius tractabo.

Tab. XXIII. Fig. 94. 458. Sit igitur proposita Curva quæcunque AMm, cujus natura data sit per æquationem inter Coordinatas orthogonales $AP = x$, $PM = y$. Ducatur jam recta quæcunque BMm, quæ quot & quibusque in punctis sectura sit Curvam AMm definiri oporteat. Ad hoc quæratur æquatio pro Linea recta pariter inter Coordinatas orthogonales x & y ad eundem Axem AP idemque Abscissarum initium A relata. Æquatio ergo pro Linea recta erit hujusmodi $\alpha x + \beta y = \gamma$; qua indicatur, posito $x = 0$, fore $y = AD = \frac{\gamma}{\beta}$, posito autem $y = 0$, fore $x = -AB = \frac{\gamma}{\alpha}$; unde, concursus B hujus rectæ cum Axe, pariterque angulus ad B, cujus tangens est $= \frac{AD}{AB} = \frac{-\alpha}{\beta}$, innotescit. Sic igitur tam Curva quam Recta proposita per æquationes inter communes Coordinatas x & y exprimuntur.

459. Quod si in utraque æquatione Abscissas x perpetuo æquales assumamus, Applicatæ y, si sint diversæ, ostendent, quantum Curvæ & rectæ puncta eidem Abscissæ respondentia a se invicem distent. Si igitur ex utraque æquatione æqualis prodeat valor Applicatæ y, tum ibi Curva & Recta commune habebunt punctum, ideoque eo in loco dabitur intersectio. Ad intersectiones ergo inveniendas in utraque æquatione, præter Abscissas x, quoque Applicatæ y æquales sunt constituendæ; sicque habebuntur duæ æquationes duas quantitates incognitas x & y evolventes, ex quarum resolutione vel Abscissæ x, quibus intersectiones respondent, vel Applicatæ y reperientur. Scilicet, si ex istis duabus æquationibus eliminetur incognita y, æquatio nascetur solam incognitam x complectens, cujus valores exhibebunt Abscissas AP, Ap unde Applicatæ PM, pm eductæ per intersectionum puncta M & m transibunt.

460. Cum

460. Cum æquatio pro recta BMm ſit $\alpha x + \beta y = \gamma$, ex ea fiet $y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$; qui valor ſi in æquatione pro Curva loco y ſubſtituatur, orietur æquatio tantum x continens, cujus radices reales præbebunt omnes Abſciſſas, quibus interſectiones reſpondent; ideoque interſectionum numerus colligetur ex numero radicum realium ipſius x, quas æquatio inventa ſuppeditat. Quoniam vero in valore ipſius $y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$, incognita x unicam tenet dimenſionem, poſt ſubſtitutionem emerget æquatio, in qua x non plures habebit dimenſiones, quam antea in æquatione pro Curva ambæ x & y conjunctim tenuerant. Habebit ergo x vel totidem dimenſiones vel pauciores, ſi quidem per ſubſtitutionem ſummæ ipſius x poteſtates tollantur. CAP. XIX.

461. Inventis hoc modo Abſciſſis AP, Ap, quæ interſectionibus reſpondent, ex iis ipſa interſectionum puncta M & m facile definientur. Cum enim Applicatæ in punctis P & p erectæ per interſectiones tranſeant, ea tantum puncta erunt notanda, ubi hæ Applicatæ rectam BMm ſecant. Notari quoque poſſent puncta, quibus iſtæ Applicatæ Curvæ AMm occurrunt; cum autem ſæpenumero una Applicata Curvæ in pluribus punctis occurrat, incertum foret quodnam Curvæ punctum ſimul interſectionem ſit præbiturum. Hoc autem incommodum uſu non venit, ſi interſectiones ex recta BMm æſtimentur; quippe a qua unaquæque Applicata non niſi in unico puncto ſecari poteſt. Quod ſi autem eveniat, ut duo ipſius x valores fiant inter ſe æquales, tum duo interſectionum puncta M & m in unum coaleſcent; quo ergo caſu vel recta BM Curvam tanget, vel eam in puncto duplici ſecabit.

462. Si, eliminata incognita y, æquatio reſultans qua x definitur, nullam habeat radicem realem, tum hoc erit indicium Curvam nuſquam a recta BMm ſecari vel tangi; radices autem reales (quotquot fuerint) illius æquationis oſtendent totidem interſectiones; quia unicuique Abſciſſæ reali una rectæ BMm Applicata realis reſpondet; cui cum ſit æqualis Ap-

Lib. II. plicata Curvæ, fieri non poteſt, quin ibi nulla exiſtat interſectio. Hæc ideo iſto loco probe ſunt notanda, quod in interſectione Linearum curvarum non ſemper ſingulæ radices totidem interſectiones indicent; cujus ratio mox fiet manifeſta, cum duas Lineas curvas contemplabimur, earumque interſectiones inveſtigabimus.

Tab. XXIII. Fig. 95. 463. Sint igitur deſcriptæ duæ Curvæ quæcunque MEm, MFm, quæ ſe mutuo interſecent; ad quarum interſectiones definiendas, natura utriuſque exprimatur per æquationem inter Coordinatas orthogonales x & y ad eundem communem Axem AB idemque Abſciſſarum initium A relatas. Sumtis ergo pro utraque Curva Abſciſſis x æqualibus, ubi dantur interſectiones, ibidem Applicatæ y convenient. Quocirca, ſi ex duabus Curvarum æquationibus propoſitis, eliminando y, formetur nova æquatio ſolam x tanquam incognitam involvens, interſectiones omnes M, m, m, quotquot fuerint, indicabuntur per radices reales iſtius æquationis; ſcilicet, Abſciſſæ AP, Ap, Ap, &c. quæ interſectionibus M, m, m, &c. reſpondent, erunt valores ipſius x convenientes pro illa æquatione.

464. Inventis autem Abſciſſis his AP, Ap &c., quæ interſectionibus conveniunt, non tam facile erit ipſa interſectionum puncta definire. Si enim pro utraque Curva eidem Abſciſſæ AP plures Applicatæ reſpondeant, quod evenit, ſi pro utraque Curva fuerit y Functio multiformis ipſius x, tum ex hac duplici Applicatarum multitudine eas, quæ ſint inter ſe æquales, eligi oportet: quæ inveſtigatio eo erit moleſtior, quo plures valores Applicata y in utraque Curva obtineat. Huic tamen difficultati facile occurretur, ſi, dum ex binis æquationibus propoſitis Applicata y eliminatur, ea æquatio in ſubſidium vocetur, qua y per x definitur; ex hac enim æquatione pro quovis ipſius x valore invento cognoſcetur magnitudo Applicatæ ex puncto P ad interſectionem uſque pertingentis; neque ad hoc opus erit, naturam alterutrius vel adeo utriuſque Curvæ perpendiſſe.

465. Sit

465. Sit una Curva Parabola, cujus natura hac exprimatur æquatione $yy - 2xy + xx - 2ax = 0$; altera vero ſit Circulus æquatione $yy + xx - cc = 0$, expreſſus. Ad y elimininandum ſubtrahatur primum prior æquatio a poſteriori, ac remanebit

$$2xy + 2ax - cc = 0,\ \text{unde fit}\ y = \frac{cc - 2ax}{2x}$$

ex qua jam patet, quicunque valores pro x reſultent, iis ſemper valores ipſius y reales repertum iri. Subſtituatur ergo iſte valor pro y inventus in altera æquatione, ac prodibit

$$c^4 - 4accx + 4(aa - cc)xx + 4x^4 = 0,$$

cujus adeo æquationis ſingulæ radices reales præbebunt interſectiones veras. Ponamus eſſe $c = 2a$ ideoque

$$4a^4 - 4a^3x - 3aaxx + x^4 = 0,$$

cujus æquationis una radix eſt $x = 2a$, qua extracta remanebit hæc æquatio

$$x^3 + 2axx + aax - 2a^3 = 0,$$

quæ unam adhuc præbet radicem realem; utrique autem Applicata conveniens invenitur ex hac æquatione $y = \frac{2aa - ax}{x}$, priori ſcilicet $x = 2a$, reſpondebit $y = 0$, ita ut interſectio in ipſo fiat Axe.

466. Hinc intelligitur quoties ambæ æquationes inter x & y ita fuerint comparatæ, ut in negotio eliminationis ipſius y inveniatur Functio rationalis ipſius x quæ æqualis ſit ipſi y; tum unamquamque radicem realem ipſius x, quam ultima æquatio, (poſtquam y penitus eſt eliminata,) præbebit, exhibituram eſſe interſectionem veram. Verum, ſi inter eliminandum nulla inveniatur Functio rationalis ipſius x, quæ æqualis ſit ipſi y; tum evenire poteſt, ut non omnes radices reales ex ultima

LIB. II. æquatione erutæ præbeant interſectiones veras. Tantus enim ſubinde valor pro x prodire poteſt, cui in neutra Curva Applicata realis reſpondeat; neque tamen hoc caſu calculus erroris eſt arguendus. Cum enim hujuſmodi Abſciſſæ pro utraque Curva Applicata imaginaria reſpondeat, in imaginariis autem æqualitas & inæqualitas æque locum habeat atque in realibus; nihil impedit, quo minus Applicatæ illæ imaginariæ inter ſe ſint æquales, ideoque interſectionem mentiantur.

TAB. XXIII. Fig. 96. 467. Ad hoc clarius oſtendendum, deſcribantur ſuper eodem Axe BAE Parabola EM Parametri $= 2a$, & extra eam Circulus AmB Radii $= c$; exiſtente intervallo $AE = b$; ita ut certum ſit nullam prorſus dari interſectionem. Sumatur A pro Abſciſſarum initio, quæ verſus E affirmativæ, retro autem verſus B negativæ ſtatuantur; atque, pro Parabola habebitur hæc æquatio $yy = 2ax - 2ab$; pro Circulo vero hæc $yy = -2cx - xx$. Quod, ſi jam, quaſi interſectionem indagare velimus, eliminemus y, ſtatim habebimus $xx + 2(a+c)x - 2ab = 0$, ex qua duo pro x valores reales reperiuntur, nempe

$$x = -a - c \pm \surd((a+c)^2 + 2ab),$$

alter affirmativus, alter negativus; cum tamen nulla exiſtat interſectio. Pro his ſcilicet duabus Abſciſſis tam Parabola quam Circulus exhibebit Applicatas imaginarias, quæ, utut imaginariæ, tamen inter ſe erunt æquales: fiet autem hoc ipſius x valore ſubſtituto

$$y = \surd(-2aa - 2ac - 2ab \pm 2a\surd(aa + 2ac + cc + 2ab))$$

quæ expreſſio utique eſt imaginaria.

468. Ex hoc exemplo intelligitur dari etiam Curvarum interſectiones imaginarias; quæ, etiamſi ſint nullæ, tamen per calculum æque indicentur ac reales. Atque hanc ob rem ex numero radicum realium ipſius x, quas ultima æquatio continet, non ſemper interſectionum numerus recte concludetur; fieri enim poteſt ut plures radices reales adſint quam interſectiones,

ſectiones, atque etiam nulla omnino exiſtat interſectio; cum tamen duæ pluresve radices reales ipſius x reſultent. Interim tamen quælibet interſectio ſemper unam inducet radicem realem ipſius x in æquationem ultimam; & hanc ob rem ſemper tot, ad minimum, erunt radices reales ipſius x, quot ſunt interſectiones, etiamſi interdum plures radices reales affuerint. Utrum autem unicuique radici reali ipſius x interſectio realis reſpondeat facile perſpicietur, ſi valor ipſius y reſpondens quæratur, qui ſi prodeat realis, interſectio erit realis, ſin ſit imaginarius, interſectio quoque erit imaginaria vel nulla.

469. Hæc igitur exceptio ſeu differentia inter radicum realium ipſius x & interſectionum numerum tantum locum habet, ſi vel in utraque æquatione Applicata y pares tantum ubique habeat dimenſiones, atque adeo Axis principalis ſimul ſit utriuſque Curvæ Diameter; vel ſi ambæ æquationes ita fuerint comparatæ, ut, dum eliminatur yy, ſimul y ex calculo excedat; ſicque y per Functionem rationalem ipſius x exprimi nequeat. Sic, ſi altera æquatio fuerit $yy - xy = aa$, altera vero $y^4 - 2xy^3 + x^3y = bbxx$; cum ex priori ſit $(yy - xy)^2 = a^4$, ſeu $y^4 - 2xy^3 = a^4 - xxyy$, ſubſtituatur hic valor in altera, eritque $a^4 - xxyy + x^3y = bbxx$, ſeu $yy - xy = \frac{a^4 - bbxx}{xx} = aa$: unde fit $xx = \frac{a^4}{aa + bb}$ ideoque $x = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa + bb)}}$. Videtur ergo dari duplex interſectio, ſed an utraque ſit realis ex valore ipſius y colligi debet, quem hæc æquatio $yy - xy = aa$ ſuppeditat. Erit ergo

$yy = \frac{\pm aay}{\sqrt{(aa + bb)}} + aa$, cujus cum omnes radices ſint reales, patet quatuor dari interſectiones, ita ut utrique Abſciſſæ $x = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa + bb)}}$ binæ interſectiones reales reſpondeant.

470. Quando autem neque Axis utriuſque Curvæ Diameter exiſtit, neque iſte caſus locum habet, ut dum altiores ipſius y poteſtates eliminantur, ſimul y prorſus eliminetur; tum,

LIB. II. quia ad Functionem rationalem ipsius x pervenietur ipsi y æqualem, singulæ radices reales ultimæ æquationis totidem indicabunt intersectiones veras, ita ut his casibus nulla cautione sit opus. Evenit hoc, si altera Curva abeat in rectam, uti ante vidimus, vel, si ejus Applicata exprimatur per Functionem uniformem ipsius x; tum enim nulli Abscissæ respondebit Applicata imaginaria; ideoque singulæ radices ipsius x exhibebunt intersectiones veras. Plerumque autem, etiamsi y in utraque æquatione plures obtineat dimensiones, tamen inter eliminationem ipsius y, perveniri solet ad æquationem, qua valor ipsius y per Functionem rationalem, ideoque uniformem, ipsius x exprimitur.

471. Quoties autem accidit, ut aliquot intersectiones quas calculus exhibet, sint imaginariæ, id non solum iis evenit casibus, quando neutra Curva habet Applicatam realem illi Abscissæ inventæ respondentem; quod quidem factum est in superiori Circuli & Parabolæ exemplo. Sed etiam ejusmodi casus exhiberi possunt, quibus una Curva pro omnibus Abscissis præbet Applicatas reales, neque tamen singulis radicibus realibus ipsius x intersectiones respondeant. Hujusmodi exemplum præbet Linea tertii ordinis, hac æquatione expressa

$$y^3 - 3ayy + 2aay - 6axx = 0,$$

quæ pro omnibus Abscissis reales præbet Applicatas; & quidem ternas si fuerit x minor quam $\frac{a}{3}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$. Quod, si cum hac Curva combinetur Parabola æquatione $yy - 2ax = 0$, contenta, cujus nulla datur Applicata realis, si x sit negativum, ideoque Abscissis x negativis nulla intersectio convenire potest.

472. Eliminetur jam y: &, cum sit ex æquatione posteriori $yy = 2ax$, prior æquatio abibit in hanc

$$2axy - 6aax + 2aay - 6axx = 0, \text{ unde fit}$$

$y =$

$y = \frac{6aax + 6axx}{2aa + 2ax} = 3x$. Quoniam vero illa æquatio est divisibilis per $y - 3x$; si dividatur, orietur æquatio ab y libera hæc $2aa + 2ax = 0$, unde oritur $x = -a$. Deberet ergo esse intersectio Curvarum respondens Abscissæ $x = -a$, cui in Parabola nulla Applicata realis respondet: in Linea autem altera tertii ordinis, posito $x = -a$, fit $y^3 - 3ayy + 2aay - 6a^3 = 0$, ex qua una nascitur Applicata realis, $y = 3a$, reliqui duo ipsius y valores in æquatione $yy + 2aa = 0$, contenti sunt imaginarii; hoc scilicet loco Applicatæ istæ imaginariæ æquales fiunt Applicatis Parabolæ imaginariis eodem hoc loco; sicque habebuntur duæ intersectiones imaginariæ. Habebuntur vero etiam duæ intersectiones reales ex superioris æquationis Factore $y - 3x = 0$, oriundæ; ex qua fit $9xx - 2ax = 0$. Primum ergo in ipso Abscisscissarum initio, ubi $x = 0$, simulque $y = 0$, existit intersectio, altera respondet Abscissæ $x = \frac{2a}{9}$, ubi est $y = 3x = \frac{2a}{3}$.

473. Hoc igitur casu perventum est ad intersectiones imaginarias, etiamsi in negotio eliminationis ipsius y, prodierit æquatio $2axy - 6aax + 2aay - 6axx = 0$, in qua y unicam tantum obtinet dimensionem, ita ut inde y per Functionem rationalem ipsius x exprimi posse videatur, quod ante tanquam criterium nullarum intersectionum imaginariarum annotavimus. Atque revera, si hæc æquatio nullos haberet divisores, intersectionibus imaginariis nullus locus relinqueretur, quoniam vero hoc casu per divisionem elicitur æquatio Applicatam y non amplius involvens, perinde est, ac si y per Functionem rationalem ipsius x exprimi non posset. Quoties scilicet hujusmodi æquatio in Factores est resolubilis, pro unoquoque Factore seorsim judicium est ferendum, unde fit, ut, dum alter Factor intersectiones imaginarias penitus respuit, alter easdem admittat.

474. His perpensis, ostendamus aliquanto distinctius, quemadmodum

LIB. II. admodum duabus quibusvis Curvis propositis earum intersectiones definiri debeant: atque, cum hæc investigatio ab eliminatione alterius Coordinatæ y pendeat, ad hujus tantum dimensiones, quas in utraque æquatione obtinet, erit respiciendum. Eliminatio enim eodem modo absolvetur, utcunque altera Coordinata x utramque æquationem afficiat. Sint igitur P, Q, R, S, T &c., itemque p, q, r, s, t &c., Functiones quæcunque rationales ipsius x: ac primo quidem ponamus ambas Curvas, quarum intersectiones requiruntur, exprimi his æquationibus

I.

$$P + Qy = 0$$

II.

$$p + qy = 0$$

multiplicetur prior æquatio per p, posterior per P; atque hæ æquationes a se invicem subductæ relinquent hanc æquationem ab y prorsus liberam:

$$pQ - Pq = 0.$$

Hujus igitur æquationis, in qua sola incognita x, præter constantes, inest, omnes radices reales ipsius x præbebunt puncta in Axe, quibus intersectiones imminent. Pro quocunque valore ipsius x invento habebitur valor ipsius y realis ex alterutra æquatione $y = \frac{-P}{Q} = \frac{-p}{q}$, qui intersectionem indicabit; unde, si utriusque Curvæ Applicata y exprimatur per Functionem rationalem seu uniformem ipsius x, nullæ intersectiones imaginariæ locum inveniunt.

475. Exprimatur jam alterius Curvæ Applicata y per Functionem uniformem ipsius x ut ante; alterius vero per Functionem biformem, ita ut sit

I.

I.

$$P + Qy = 0$$

II.

$$p + qy + ryy = 0,$$

multiplicetur prior æquatio per p, poſterior per P, & a ſe invicem ſubtrahantur, factaque diviſione per y, erit

III.

$$pQ - Pq - Pry = 0,$$

ſeu

$$(Pq - pQ) + Pry = 0.$$

Nunc multiplicetur prima per Pr, & tertia per Q; atque, facta ſubtractione, emerget hæc æquatio ab y libera.

$$PPr - PQq + pQQ = 0.$$

Hujus æquationis ergo ſingulæ radices præbebunt Abſciſſas interſectionibus reſpondentes, quibus cum Applicatæ reales $y = \frac{-P}{Q} = \frac{pQ - Pq}{Pr}$ conveniant, interſectiones erunt reales.

476. Sit, ut ante, alterius Curvæ Applicata æqualis Functioni uniformi ipſius x; alterius vero Curvæ Applicata exprimatur per æquationem cubicam; ſeu, ſit Functio triformis ipſius x, ita ut binæ æquationes propoſitæ ſint hujuſmodi:

I.

$$P + Qy = 0$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Multiplicetur prior per p & poſterior per P; alteraque ab altera ſubducta ac diviſione per y facta, erit

III.

$$(Pq - pQ) + Pry + Psyy = 0,$$

LIB. II. in qua si loco y valor ex prima $y = \frac{-P}{Q}$ substituatur & a fractionibus liberetur, proveniet ista æquatio

$$PQQq - pQ^3 - P^2Qr + P^3s = 0,$$
seu
$$Q^3p - PQ^2q + P^2Qr - P^3s = 0,$$

quæ eadem statim prodit, si in secunda æquatione loco y ejus valor ex prima $\frac{-P}{Q}$ substituatur. Hujus ergo ultimæ æquationis omnes radices reales ipsius x, quoniam singulis per primam æquationem $y = \frac{-P}{Q}$ Applicatæ reales respondent, totidem intersectiones veras monstrabunt.

477. Simili modo, si alterius Curvæ Applicata y exprimatur per æquationem quatuor pluriumve dimensionum, dum alterius Applicata manet Functio uniformis seu rationalis ipsius x, facile incognita y eliminatur. Sint enim ambæ æquationes propositæ

I.
$$P + Qy = 0$$
II.
$$p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0;$$

atque, cum ex priori sit $y = \frac{-P}{Q}$, hic valor in altera substitutus dabit æquationem inter x & cognitas tantum hanc

$$Q^4p - PQ^3q + P^2Q^2r - P^3Qs + P^4t = 0.$$

Hujus ergo æquationis singulæ radices ipsius x reales suppeditabunt totidem intersectiones veras; propterea quod unicuique Abscissæ x ex prima æquatione assignari potest una Applicata y realis, nempe $y = \frac{-P}{Q}$.

478. Exprimatur jam utriusque Curvæ Applicata y per æquationem

quationem quadraticam; ac primo quidem puram, ita ut æquationes ambæ ſint hujuſmodi

I.

$$P + Ryy = 0$$

II.

$$p + ryy = 0$$

ex quibus, eliminando yy, ſtatim obtinetur hæc æquatio,

$$Pr - Rp = 0,$$

cujus ſingulæ radices reales tum ſolum demonſtrant interſectiones veras, ſi valores ipſius x inventi ita fuerint comparati, ut $\frac{-P}{R}$ vel $\frac{-p}{r}$ fiat quantitas affirmativa; tum enim, ob $yy = \frac{-P}{R} = \frac{-p}{r}$, Applicata y duplicem nanciſcetur valorem realem, alterum affirmativum alterum negativum; ideoque cuique Abſciſſæ x valori ex æquatione $Pr - Rp = 0$, invento, binæ reſpondebunt interſectiones, ab Axe utrinque æqualiter diſtantes, quod, cum Axis utriuſque Curvæ Diameter exiſtat, aliter evenire non poteſt. Quod ſi autem quis valor ipſius x ex æquatione $Pr - Rp = 0$, inventus expreſſionibus $\frac{-P}{R} = \frac{-p}{r}$ inducat valorem negativum; tum, ob y imaginarium, interſectiones quoque erunt imaginariæ.

479. Adſit nunc in utraque æquatione propoſita quadratica ſecundus quoque terminus continens y, ſintque ambæ æquationes propoſitæ iſtæ

I.

$$P + Qy + Ryy = 0$$

II.

$$p + qy + ryy = 0$$

Ad incognitam y ex his æquationibus eliminandam multiplicetur primum illa æquatio per p, hæc vero per P, factaque ſubtractione & diviſione per y, erit

 III.

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y = 0.$$

Deinde multiplicetur prior æquatio per r, posterior vero per R, alteraque ab altera subtracta habebitur

IV.

$$(Pr - Rp) + (Qr - Rq)y = 0.$$

Cum igitur ex his duabus æquationibus sit

$$y = \frac{Qp - Pq}{Pr - Rp} = \frac{Rp - Pr}{Qr - Rq}$$

erit

$$(Qp - Pq)(Qr - Rq) + (Pr - Rp)^2 = 0,$$

seu

$$P^2r^2 - 2PRpr + R^2p^2 + Q^2pr - PQqr - QRpq + PRq^2 = 0.$$

Cujus æquationis singulæ radices reales ostendent totidem intersectiones veras, si quidem cuique valori ipsius x valor realis ipsius y convenit ex æquatione III. vel IV. Interim tamen fieri potest, ut intersectiones sint imaginariæ, quod evenit si æquationes III. & IV. habeant Factores; ita ut ex iis jam per divisionem æquatio ab y libera elici queat. Tum enim hæc æquatio in locum ultimæ substitui, atque ad valores ipsius x inde erutos ex primis æquationibus valores ipsius y respondentes quæri debebunt; qui si fuerint imaginarii, hoc erit indicio intersectiones esse imaginarias.

480. Sit porro in una Curva Applicata y Functio biformis, in altera autem triformis ipsius x; seu, sint ambæ Curvarum æquationes propositæ hæ

I.

$$P + Qy + Ryy = 0$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Multiplicetur prior per p, posterior per P, alteraque ab altera subtracta remanebit

III.

CAP. XIX.

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + Psyy = 0,$$

quæ cum prima conjuncta exhibet casum in præcedente paragrapho pertractatum; ita ut, quæ ibi erant p, q, r, hic sint $Pq - Qp$, $Pr - Rp$, & Ps: ideoque reperietur hic

$$y = \frac{PQq - QQp - PPr + PRp}{PPs - PRq + QRp},$$

&

$$y = \frac{PRq - QRp - PPs}{PQs - PRr + RRp};$$

unde fit

$$0 = (PRq - QRp - PPs)^2 + (PQs - PRr + RRp)(PQq - Q^2p - P^2r + PRp),$$

quæ æquatio evoluta dat

$$P^4s^2 \begin{matrix} -2P^3Rqs \\ -P^3Qrs \\ +P^3Rrr \end{matrix} \begin{matrix} +3P^2QRps \\ +P^2R^2qq \\ +P^2Q^2qs \\ -P^2QRqr \\ -2P^2R^2pr \end{matrix} \begin{matrix} -PQR^2pq \\ -PQ^3ps \\ +PQ^2Rpr \\ +PR^3pp \end{matrix} \begin{matrix} +Q^2R^2p^2 \\ -Q^2R^2p^2 \end{matrix} = 0$$

quæ, ob ultimum terminum evanescentem, divisibilis est per P, sicque prodibit hæc æquatio

$$\begin{matrix} +P^3s^2 - 2P^2Rqs - P^2Qrs + 3PQRps + PQ^2qs - Q^3ps + R^3p^2 \\ +P^2Rr^2 - PQRqr - 2PR^2pr + Q^2Rpr + PR^2q^2 - QR^2pq \end{matrix} = 0.$$

Ex cujus æquationis radicibus realibus intersectiones cognoscentur, si quidem ipsis valores reales ipsius y respondere deprehendantur.

481. Exprimatur nunc utraque Applicata per æquationem cubicam, sintque ambæ æquationes propositæ hæ

I.

$$P + Qy + Ryy + Sy^3 = 0$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

 Multipli-

LIB. II. Multiplicetur prior per p, poſterior per P, factaque ſubtractione alterius ab altera, remanebit

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + (Ps - Sp)yy = 0.$$

Deinde multiplicetur prior per s, poſteriorque per S, factaque ſubtractione remanebit

IV.

$$(Sp - Ps) + (Sq - Qs)y + (Sr - Rs)yy = 0.$$

Hæ æquationes III. & IV. ſi comparentur cum binis æquationibus §. 479. tractatis, fiet ut ſequitur

$$\begin{array}{l|l} P = Pq - Qp & p = Sp - Ps \\ Q = Pr - Rp & q = Sq - Qs \\ R = Ps - Sp & r = Sr - Rs \end{array}$$

Quibus in æquatione finali ſubſtitutis, emerget

$$\begin{aligned} &+(Pq-Qp)^2(Sr-Rs)^2 - 2(Pq-Qp)(Ps-Sp)(Sp-Ps)(Sr-Rs) \\ &+(Ps-Sp)^2(Sp-Ps)^2 + (Pr-Rp)^2(Sp-Ps)(Sr-Rs) - \\ &(Pq-Qp)(Pr-Rp)(Sq-Qs)(Sr-Rs) - (Pr-Rp)(Ps-Sp) \\ &(Sp-Ps)(Sq-Qs) + (Pq-Qp)(Ps-Sp)(Sq-Qs)^2 = 0. \end{aligned}$$

In hac æquatione ſeptem ſunt termini, qui omnes ſunt diviſibiles per $Sp - Ps$, præter primum & quintum: qui autem, ſi conjungantur, duos habebunt Factores, alterum $(Pq - Qp)(Sr - Rs)$, alterum vero $Pq - Qp)(Sr - Rs) - (Pr - Rp)(Sq - Qs)$, qui poſterior reſolutus fit $= PQrs + RSpq - PRqs - QSpr$ ideoque, $= (Sp - Ps)(Rq - Qr)$: unde termini I. & V. coaleſcent in hanc formam $(Pq - Qp)(Sr - Rs)(Sp - Ps)(Rq - Qr)$ quoque per $Sp - Ps$ diviſibilem. Quocirca orietur hæc æquatio

$0 =$

$$0 = (Pq - Qp)(Sr - Rs)(Rq - Qr) + 2(Pq - Qp)(Sp - Ps)(Sr - Rs) + (Sp - Ps)^3 + (Pr - Rp)^2(Sr - Rs) + (Pr - Rp)(Sp - Ps)(Sq - Qs) - (Pq - Qp)(Sq - Qs)^2$$

quæ evoluta dabit

$$+ S^3p^3 - 3PS^2p^2s + P^2Sr^3 + 2PR^2prs - P^2Rr^2s + P^2Qrss + PRSqqr - P^3s^3 + 3P^2Sps^2 - R^3p^2s - 2PRSpr^2 + R^2Sp^2r - RSSp^2q - QQRprs - PR^2qqs - PQSqrr + PQRqrs + 3PSSpqr - 3PPSqrs + PQSprs + Q^2Sprr + QRRpqs - QRSpqr - 3PQRpss + 3QRSpps - PRSpqs + 2P^2Rqss + 2PQSqqs - PSSq^3 - PQ^2qss - 2QS^2ppr - 2QQSpqs + Q^3pss + QS^2pqq = 0.$$

482. Quo methodus ista eliminandi y ex duabus æquationibus altiorum graduum clarius percipiatur, ponamus utramque æquationem propositam esse quarti ordinis

I.

$$P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + Ty^4 = 0$$

II.

$$p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0,$$

multiplicetur æquatio prior per p, posterior per P, atque post subtractionem relinquetur

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + (Ps - Sp)y^2 + (Pt - Tp)y^3 = 0.$$

Deinde multiplicetur æquatio I. per t, posterior II. per T, &, facta subtractione, remanebit

IV.

$$(Pt - Tp) + (Qt - Tq)y + (Rt - Tr)y^2 + (St - Ts)y^3 = 0.$$

Ponatur nunc brevitatis gratia

$Pq - Qp = A$	$Pt - Tp = a$	$Sq - Qs = \alpha$
$Pr - Rp = B$	$Qt - Tq = b$	$Rq - Qr = \beta$
$Ps - Sp = C$	$Rt - Tr = c$	
$Pt - Tp = D$	$St - Ts = d$	

ubi notandum est esse non solum $a = D$; sed esse quoque

$Ad -$

$$Ad - Cb = (Pt - Tp)(Sp - Qs) = D\alpha$$
$$Ac - Bb = (Pt - Tp)(Rq - Qr) = D\beta.$$

His ergo ſubſtitutionibus æquationes III. & IV. induent has formas

III.
$$A + By + Cyy + Dy^3 = 0$$
IV.
$$a + by + cyy + dy^3 = 0.$$

Nunc porro æquationes hæ multiplicentur reſpective per d & D, & a ſe invicem ſubtrahantur, prodibitque

V.
$$(Ad - Da) + (Bd - Db)y + (Cd - Dc)y^2 = 0.$$

Tum eædem illæ æquationes multiplicentur per a & A, & poſt ſubtractionem relinquetur

VI.
$$(Ab - Ba) + (Ac - Ca)y + (Ad - Da)y^2 = 0.$$

Jam ſtatuatur iterum brevitatis gratia

$$\left.\begin{array}{l} Ab - Ba = E \\ Ac - Ca = F \\ Ad - Da = G \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} Ad - Da = e \\ Bd - Db = f \\ Cd - Dc = g \end{array}\right| \; Cb - Bc = \zeta$$

eritque $G = e$; & $Eg - Ff = G\zeta$; ita ut & $Eg - Ff$ ſit diviſibile per G. Hinc ſequentes habebimus æquationes

V.
$$E + Fy + Gyy = 0$$
VI.
$$e + fy + gyy = 0.$$

Ex quibus per ſimilem operationem eliciuntur iſtæ

VII.
$$(Ef - Fe) + (Eg - Ge)y = 0$$
VIII.
$$(Eg - Ge) + (Fg - Gf)y = 0.$$

Denique

Denique iterum ponatur brevitatis gratia CAP. XIX.

$$\begin{array}{l|l} Ef - Fe = H & Eg - Ge = h \\ Eg - Ge = I & Fg - Gf = i \end{array}$$

ita ut ſit $I = h$, habebiturque

VII.

$$H + Iy = 0$$

VIII.

$$h + iy = 0,$$

ex quibus tandem colligitur hæc æquatio ab y libera

$$Hi - Ih = 0.$$

In qua ſi valores præcedentes ſucceſſive reſtituantur, obtinebitur æquatio quam ſolæ Functiones P, Q, R, &c. p, q, r, &c., primarum æquationum ingredientur. Æquatio vero inter E, F, G, e, f, g diviſibilis erit per $G = e$; atque, ſi procedatur ad litteras A, B, C, D, a, b, c, d, æquatio reſultans diviſionem admittet per $D^2 = a^2$, ita ut in æquatione ultima quivis terminus octo tantum complexurus ſit litteras, quatuor majuſculas, totidemque minuſculas. Hoc itaque modo in genere, quotcunque dimenſiones ipſius y utraque æquatio propoſita contineat, ſemper incognita y poterit eliminari, atque æquatio, quæ ſolam incognitam x involvat, inveniri.

483. Etſi hujus methodi ex duabus æquationibus unam incognitam eliminandi uſus latiſſime patet, tamen aliam adhuc methodum ſubjungam, quæ tot repetitis ſubſtitutionibus non indigeat. Sint igitur propoſitæ duæ æquationes quotcunque dimenſionum

I.

$$Py^m + Qy^{m-1} + Ry^{m-2} + Sy^{m-3} + \&c. = 0$$

II.

$$py^n + qy^{n-1} + ry^{n-2} + sy^{n-3} + \&c. = 0,$$

 ex quibus unam æquationem, in qua y amplius non insit, conflari oporteat. Ad hoc multiplicetur æquatio posterior per hanc quantitatem

$$Py^{k-n} + Ay^{k-n-1} + By^{k-n-2} + Cy^{k-n-3} + \&c.,$$

quæ $k-n$ litteras arbitrarias A, B, C, &c., continet. Æquatio vero prior multiplicetur per hanc quantitatem

$$py^{k-m} + ay^{k-m-1} + by^{k-m-2} + cy^{k-m-3} + \&c.,$$

in qua $k-m$ litteræ arbitrariæ a, b, c, &c., insunt. Tum ambo producta ita inter se æqualia ponantur ut omnes termini qui continent potestates ipsius y se mutuo destruant, terminique ultimi ipsa y carentes æquationem quæsitam exhibeant. Summæ autem potestates jam sponte se destruunt, in utroque enim producto summus terminus erit Ppy^k; supersunt ergo adhuc $k-1$ termini, qui destrui debebunt, ad quod totidem litteræ arbitrariæ sunt determinandæ. Numerus autem litterarum arbitrariarum sic introductarum est $2k-m-n$, qui cum æqualis esse debeat $k-1$, fiet $k=m+n-1$.

484. Hanc ob rem prima æquatio multiplicetur per hanc quantitatem indeterminatam

$$py^{n-1} + ay^{n-2} + by^{n-3} + cy^{n-4} + \&c.,$$

secunda vero æquatio multiplicetur per hanc

$$Py^{m-1} + Ay^{m-2} + By^{m-3} + Cy^{m-4} + \&c.$$

Singulisque terminis, in quibus similes ipsius y occurrunt potestates, inter se coæquatis, nascentur sequentes æquationes

$$\begin{gathered} Pp = Pp \\ Pa + Qp = pA + qP \\ Pb + Qa + Rp = pB + qA + rP \\ Pc + Qb + Ra + Sp = pC + qB + rA + sP \\ \&c. \end{gathered}$$

Hujus-

Hujusmodi ergo æquationes, prima $Pp = Pp$ simul computata, habebuntur numero $m+n$, ex quibus si litteræ arbitrariæ A, B, C, &c. a, b, c, &c. determinentur, ultima æquatio nonnisi litteras datas P, Q, R, &c. p, q, r, &c. continebit, sicque quæsito satisfaciet. Cap. XIX.

485. Hæc autem litterarum arbitrariarum determinatio facilius expedietur, si membra uniuscujusque æquationis æqualia ponantur novis indeterminatis quantitatibus α, β, γ, &c.; quod ex sequenti exemplo clarius apparebit.

Sint propositæ hæ æquationes duæ

I.

$$Py^2 + Qy + R = 0$$

II.

$$py^3 + qy^2 + ry + s = 0,$$

multiplicetur ergo prima per $py^2 + ay + b$, & altera per $Py + A$; prodibuntque hæ æqualitates

$$\begin{aligned} Pp &= Pp \\ Pa + Qp &= pA + qP = \alpha \\ Pb + Qa + Rp &= qA + rP = \beta \\ Qb + Ra &= rA + sP \\ Rb &= sA \end{aligned}$$

Æquatione prima identica omissa, ex secunda fit

$$a = \frac{\alpha - Qp}{P}$$

$$A = \frac{\alpha - qP}{p}.$$

Ex tertia vero obinebitur

$$b = \frac{\beta}{P} - \frac{Qa}{P} - \frac{Rp}{P} = \frac{\beta}{P} - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2 p}{P^2} - \frac{Rp}{P}$$

&

$$\beta = \frac{\alpha q}{p} - \frac{qqP}{p} + rP,$$

LIB. II.

quo valore ipsius β substituto, erit

$$b = \frac{\alpha q}{Pp} - \frac{qq}{p} + r - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2 p}{P^2} - \frac{Rp}{P},$$

seu

$$b = \frac{\alpha(Pq - Qp)}{P^2 p} + \frac{(Q^2p^2 - P^2q^2)}{P^2 p} + \frac{(Pr - Rp)}{P},$$

qui valor, in quarta æquatione substitutus, dabit

$$\frac{\alpha Q(Pq - Qp)}{P^2 p} - \frac{Q(Pq - Qp)(Qp + Pq)}{P^2 p} + \frac{Q(Pr - Rp)}{P} + \frac{\alpha R}{P} - \frac{RQp}{P} = \frac{\alpha r}{p} - \frac{Prq}{p} + Ps,$$

seu, per $P^2 p$ multiplicando,

$$\alpha Q(Pq - Qp) + \alpha P(Rp - Pr) - Q(Pq - Qp)(Pq + Qp) + PQp(Pr - 2Rp) + P^3qr - P^3ps = 0.$$

Ergo fiet

$$\alpha = \frac{P^2Qq^2 - Q^3pp - P^2Qpr + 2PQRp^2 - P^3qr + P^3ps}{PQq - Q^2p + PRp - P^2r}.$$

Ultima vero æquatio dabit

$$\frac{\alpha R(Pq - Qp)}{P^2 p} - \frac{R(P^2q^2 - Q^2p^2)}{P^2 p} + \frac{R(Pr - Rp)}{P} = \frac{\alpha S}{p} - \frac{Pqs}{p},$$

ex qua quoque elicitur

$$\alpha = \frac{P^2Rq^2 - Q^2RP^2 - P^2Rpr + PR^2p^2 - P^3qs}{PRq - QRp - P^2s},$$

qui gemini ipsius α valores præbebunt æquationem quæsitam, quæ tandem reducetur ad eandem formam, quam supra §. 480. pro eodem casu invenimus.

CAPUT

CAPUT XX.

De Conſtructione æquationum.

486. Quæ in ſuperiori Capite de interſectione Curvarum ſunt expoſita potiſſimum ad conſtructiones æquationum altiorum graduum traduci ſolent. Cum enim duabus Curvis propoſitis æquationem invenerimus, cujus radices interſectionum locos exhibeant; ita viciſſim interſectiones duarum Curvarum inſervire poſſunt radicibus æquationum indicandis. Atque hic modus maximam affert utilitatem ſi radices cujuſpiam æquationis per Lineas exprimi debeant; deſcripta namque utraque Curva ad hunc finem accommodata, interſectiones facile notabuntur, unde ſi ad Axem Applicatæ demittantur, Abſciſſæ præbebunt veras æquationis radices. Si autem incommodum ſupra memoratum locum habeat, tum quidem omnes Abſciſſæ ſic inventæ radices præbebunt, at fieri poterit ut æquatio propoſita plures complectatur radices, quam per talem conſtructionem reperiuntur.

487. Cum igitur propoſita fuerit æquatio algebraïca incognitam x involvens, cujus radices aſſignari oporteat, duæ quærendæ ſunt Lineæ curvæ, ſeu duæ æquationes inter binas variabiles x & y, quæ ita ſint comparatæ, ut, ſi ex iis Applicata y eliminetur, ipſa æquatio propoſita reſultet. Quo facto iſtæ duæ Curvæ ſuper communi Axe atque ad idem Abſciſſarum initium deſcribantur, punctaque, quibus ſe mutuo interſecabunt, notentur. Tum ex his interſectionum punctis ad Axem Applicatæ normales demittantur, quæ in Axe exhibebunt Abſciſſas ſingulis æquationis propoſitæ radicibus æquales. Hoc itaque modo ſingularum radicum quæſitarum valores veri aſſignabuntur, niſi forte eveniat, ut æquatio plures contineat radices, quam interſectiones adeſſe deprehendantur.

LIB. II. 488. Antequam autem modum tradam, quo binæ illæ Curvæ constructioni datæ æquationis inservientes inveniri queant, a posteriori eas æquationes perpendamus, quarum resolutio ex datis duabus Curvis absolvitur. Ac primo quidem sint ambæ Lineæ resolventes rectæ EM, FM, sese in puncto M intersecantes. Sumatur recta EF pro Axe, in eoque punctum A pro initio Abscissarum, unde educta normalis ABC rectam priorem in B, posteriorem in C secet. Sit $AE = a$, $AF = b$; $AB = c$; $AC = d$; tum vero ponatur Abscissa $AP = x$; Applicata $PM = y$; eritque pro priori recta EM $a : c = a + x : y$, seu $ay = c(a + x)$; & pro altera $b : d = b - x : y$, seu $by = d(b - x)$. Ex his æquationibus si eliminetur y, prodibit $bc(a + x) = ad(b - x)$ seu $x = \frac{abd - abc}{bc + ad} = \frac{ab(d - c)}{bc + ad}$. Per intersectionem ergo duarum Linearum rectarum construi poterit æquatio simplex $x = \frac{ab(d - c)}{bc + ad}$; ad quam formam omnes omnino æquationes simplices revocari possunt.

TAB. XXIII. Fig. 97.

TAB. XXIII. Fig. 98. 489. Lineas rectas ratione facilitatis describendi excipit Circulus, & hanc ob rem videamus cujusmodi æquationes per intersectionem rectæ & Circuli construi queant. Sit igitur, sumta AP pro Axe & A pro Abscissarum initio, descripta Linea recta EM: positisque $AE = a$, $AB = b$, & Coordinatis $AP = x$, $PM = y$; erit $a : b = a + x : y$; ideoque $ay = b(a + x)$, quæ est æquatio pro Linea recta. Deinde sit Radius Circuli $CM = c$, demissoque ex ejus Centro C in Axem perpendiculo CD, vocetur $AD = f$, $CD = g$; erit $DP = x - f$, & $PM - CD = y - g$. Jam, cum sit ex natura Circuli $CM^2 = DP^2 + (PM - CD)^2$, erit æquatio pro Circulo $cc = xx - 2fx + ff + yy - 2gy + gg = (x - f)^2 + (y - g)^2$. At æquatio pro recta dat $y = \frac{ab + bx}{a}$, unde fit $y - g = \frac{a(b - g) + bx}{a} = b - g + \frac{bx}{a}$,

quo

quo ipsius y valore in altera æquatione substituto, emerget

$$cc = xx - 2fx + ff + (b-g)^2 + \frac{2b(b-g)x}{a} + \frac{bbxx}{aa},$$

seu

$$\left.\begin{matrix} + aa \\ + bb \end{matrix}\right\} xx \left.\begin{matrix} + 2ab(b-g) \\ - 2aaf \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} + aa(b-g)^2 \\ + aaff \\ - aacc \end{matrix}\right\} = 0,$$

cujus ergo æquationis radices invenientur per intersectiones Rectæ & Circuli, ita ut, demissis ex intersectionibus M & m in Axem perpendiculis MP, mp, valores ipsius x futuri sint AP & Ap.

490. Quoniam in hac æquatione omnes æquationes quadraticæ continentur, hinc constructio generalis æquationum quadraticarum adornari poterit. Sit scilicet proposita hæc æquatio quadratica

$$Axx + Bx + C = 0,$$

quæ ad superiorem formam primum ita reducatur ut primi termini conveniant; multiplicando per $\frac{aa+bb}{A}$,

$$(aa+bb)xx + \frac{B(aa+bb)x}{A} + \frac{C(aa+bb)}{A} = 0.$$

Jam coæquatio reliquorum terminorum dabit

$$2Aab(b-g) - 2Aaaf = B(aa+bb)$$

ideoque fiet

$$af = b(b-g) - \frac{B(aa+bb)}{2Aa}.$$

Unde, cum sit

$$aa(b-g)^2 + aaff - aacc = \frac{C(aa+bb)}{A},$$

erit

$$(aa+bb)(b-g)^2 - \frac{Bb(b-g)(aa+bb)}{Aa} + \frac{BB(aa+bb)^2}{4A^2a^2} -$$

$$aacc = \frac{C(aa+bb)}{A}$$

ideoque $(b-$

$$(b-g)^2 = \frac{Bb(b-g)}{Aa} - \frac{B(aa+bb)}{4A^2a^2} + \frac{aacc}{aa+bb} + \frac{C}{A}$$

ergo

$$b-g = \frac{Bb}{2Aa} \pm \sqrt{\left(\frac{aacc}{aa+bb} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4AA}\right)}.$$

Manent igitur tres quantitates a, b, & c adhuc indeterminatæ, quas autem ita accipi oportet, ut $\frac{aacc}{aa+bb} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4AA}$, fiat quantitas affirmativa, quia alioquin $b-g = AB - CD$, hincque CD, fieret quantitas imaginaria.

491. Nihil ergo impedit quominus ponamus $b = 0$, eritque $g = \sqrt{\left(cc - \frac{BB+4AC}{4AA}\right)}$ & $f = \frac{-B}{2A}$. Deinde vero, cum æquatio propoſita $Axx + Bx + C = 0$, radices nullas habeat reales, niſi ſit BB major quam $4AC$, erit hoc caſu $\frac{BB-4AC}{4AA}$ quantitas affirmativa, cui ſi cc ponatur æquale, ut ſit $c = \frac{\sqrt{(BB-4AC)}}{2A}$, fiet quoque $g = 0$, & a prorſus ex calculo excedit. Linea ergo recta EM in ipſum Axem AP incidet, & Centrum Circuli C collocari debebit in puncto D exiſtente $AD = \frac{-B}{2A}$, ex quo Centro ſi Circulus deſcribatur Radio $c = \frac{\sqrt{(BB-4AC)}}{2A}$, hujus interſectiones cum ipſo Axe oſtendent æquationis propoſitæ radices. Ne autem ad hoc conſtructione formulæ irrationalis opus ſit, ponatur $g = c - \frac{k}{2A}$, ut ſit $cc - \frac{2ck}{2A} + \frac{kk}{4AA} = cc - \frac{BB+4AC}{4AA}$, erit $c = \frac{kk+BB-4AC}{4kA}$, & $g = \frac{BB-4AC-kk}{4kA}$. In noſtro ergo arbitrio determinatio quantitatis k relinquitur; qua utcunque aſſumta, quia recta CM in ipſum Axem incidit, Circulus ſequenti modo deſcribi debebit. Sumta $AD = \frac{-B}{2A}$

$\frac{-B}{2A}$, capiatur perpendiculum $CD = \frac{BB - 4AC - kk}{4Ak}$, & Centro C deſcribatur Circulus cujus Radius $= \frac{BB - 4AC + kk}{4Ak}$; hujuſque interſectiones cum Axe oſtendent radices æquationis propoſitæ. Quod ſi ergo ſtatuatur $k = -B$, ſumta $AD = \frac{-B}{2A}$, capiatur $CD = \frac{C}{B}$, & Circuli Centro C deſcribendi Radius erit $= \frac{-BB + 2AC}{2AB} = \frac{-B}{2A} + \frac{C}{B}$, ex quo Radius Circuli erit $= AD + CD$; quæ conſtructio pro praxi commodiſſima videtur. CAP. XX.

492. Conſideremus jam duos Circulos ſe interſecantes: ſitque pro primo $AD = a$, $CD = b$, & ejus Radius $CM = c$; eritque, poſitis $AP = x$ & $PM = y$, $DP = a - x$, $CD - PM = b - y$; ideoque, ex natura Circuli, habebitur TAB. XXIV. Fig. 99.

$$xx - 2ax + aa + yy - 2by + bb = cc.$$

Simili modo pro altero Circulo ſit $Ad = f$, $dc = g$, ejuſque Radius $cM = h$, eritque

$$xx - 2fx + ff + yy + 2gy + gg = hh,$$

quibus æquationibus a ſe invicem ſubtractis, remanebit

$$2(f - a)x + aa - ff - 2(b + g)y + bb - gg = cc - hh,$$

ergo

$$y = \frac{aa + bb - ff - gg - cc + hh - 2(a - f)x}{2(b + g)};$$

hincque

$$b - y = \frac{bb + 2bg - aa + ff + gg + cc - hh + 2(a - f)x}{2(b + g)},$$

&

$$a - x = \frac{2a(b + g) - 2(b + g)x}{2(b + g)}.$$

Cum igitur ſit $(a - x)^2 + (b - y)^2 = cc$, erit, facta ſubſtitutione,

$$\begin{array}{l} +4(a-f)^2 \\ +4(b+g)^2 \end{array} xx \begin{array}{l} -4(a+f)(b+g)^2 \\ -4(a-f)(aa-ff) \\ +4(a-f)(cc-hh) \end{array} x \begin{array}{l} +(b+g)^4 \\ +2(aa-cc)(b+g)^2 \\ +2(ff-hh)(b+g)^2 \\ +(aa-cc-ff+hh)^2 \end{array} = 0.$$

Hujus ergo æquationis ope infinitis modis conſtrui poterit æquatio $Axx + Bx + C = 0$; ſimul vero intelligitur æquationem quadratica altiorem per interſectionem duorum Circulorum conſtrui non poſſe, propterea quod duo Circuli ſe mutuo in pluribus quam duobus punctis interſecare nequeunt. Cum igitur eadem æquatio quadratica conſtrui poſſit per interſectionem Rectæ & Circuli, hæc conſtructio illi, quæ duos Circulos requirit, merito præfertur, niſi forte in caſibus quibuſdam ſigularibus facilis Linearum a, b, f, g, c & h determinatio ſponte ſe prodat.

TAB. XXIV. Fig. 100. 493. Interſecetur nunc Circulus a Parabola: ſit ſcilicet, demiſſo ex Centro Circuli C in Axem AP perpendiculo CD, $AD = a$, $CD = b$, & Radius Circuli $CM = c$, erit inter Coordinatas orthogonales $AP = x$, $PM = y$, æquatio pro Circulo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = cc$. Parabolæ vero Axis FB ſtatuatur ad Axem hic aſſumtum AP normalis: ſitque $AE = f$, $EF = g$, & Parameter Parabolæ $= 2h$; erit, ex natura Parabolæ, $EP^2 = 2h(EF + PM)$, ſeu in ſymbolis $(x-f)^2 = 2h(g+y)$, unde erit $y = \frac{(x-f)^2}{2h} - g$ & $y - b = \frac{(x-f)^2}{2h} - (b+g)$. Qui valor ſi in priori æquatione ſubſtituatur, eliminabitur y, eritque

$$\frac{(x-f)^4}{4hh} - \frac{(b+g)(x-f)^2}{h} + (b+g)^2 + (x-a)^2 = cc$$

ſive

$$x^4 - 4fx^3 \begin{array}{l} +6ff \\ -4h(b+g) \\ +4hh \end{array} x^2 + \begin{array}{l} -4f^3 \\ 4fh(b+g) \\ -8ahh \end{array} x \begin{array}{l} +f^4 \\ -4ffh(b+g) \\ +4hh(b+g)^2 \\ +4aahh \\ -4cchh \end{array} = 0$$

cujus

cujus æquationis radices erunt Abſciſſæ AP, Ap, Ap, Ap, unde Applicatæ per interſectionum puncta M, m, m, m, tranſeunt. CAP. XX.

494. In hac æquatione ſex inſunt conſtantes a, b, c, f, g, & h; quarum vero binæ $b+g$ pro una ſunt reputandæ, ita ut quinque ſolum, ponendo $b+g=k$, ineſſe cenſendæ ſint. Poſito ſcilicet $CD+EF=b+g=k$, ſequens habebitur æquatio

$$x^4 - 4fx^3 \begin{array}{l} +6ff \\ -4hk \\ +4hh \end{array} xx \begin{array}{l} -4f^3 \\ +4fhk \\ -8ahh \end{array} x \begin{array}{l} +f^4 \\ -4ffhk \\ +4hhkk \\ +4aahh \\ -4cchh \end{array} = 0.$$

Ad hanc autem formam omnis æquatio biquadratica revocari poteſt; ſit enim propoſita hæc æquatio

$$x^4 - Ax^3 + Bxx - Cx + D = 0$$

erit, comparatione inſtituta,

$$4f = A \quad \text{ſeu} \quad f = \frac{1}{4}A$$

$$6ff - 4hk + 4hh = B \quad \text{ſeu} \quad \frac{3}{8}AA - 4hk + 4hh = B,$$

unde fit

$$k = \frac{3AA}{32h} + h - \frac{B}{4h},$$

$$4f^3 - 4fhk + 8ahh = C$$

ſive

$$\frac{1}{16}A^3 - \frac{3}{32}A^3 - Ahh + \frac{1}{4}AB + 8ahh = C$$

ergo

$$a = \frac{A^3}{256hh} + \frac{A}{8} - \frac{AB}{32hh} + \frac{C}{8hh}.$$

Denique eſt

$$(ff - 2hk)^2 + 4aahh - 4cchh = D.$$

At eſt

$$ff - 2hk = \frac{B}{2} - 2hh - \frac{AA}{16},$$

&

$2ah = \frac{A^3}{128h} + \frac{Ah}{4} - \frac{AB}{16h} + \frac{C}{4h}$, quibus valoribus ſubſtitutis emerget æquatio c & h involvens, quas propterea convenientiſſime inde definiri oportet, ita ſcilicet ut utraque valorem obtineat realem.

495. Quoniam vero in omni æquatione biquadratica ſecundus terminus facile tolli poteſt; ponamus ipſum jam eſſe ſublatum, ideoque conſtruendam eſſe hanc æquationem

$$x^4 * + Bxx - Cx + D = 0.$$

Erit ergo primum, $f = 0$; ſecundo $k = h - \frac{B}{4h}$; tertio $a = \frac{C}{8hh}$; atque, ob $2hk - ff = 2hh - \frac{B}{2}$, & $2ah = \frac{C}{4h}$, quarto $4h^4 - 2Bhh + \frac{1}{4}BB + \frac{CC}{16hh} - 4cchh = D$, unde fit $64cch^4 = CC + 4BBhh - 32Bh^4 + 64h^6 - 16Dhh$; ideoque $8chh = \surd(4hh(B - 4hh)^2 + CC - 16Dhh)$. Quoniam vero hoc imprimis eſt efficiendum ut tam c quam h obtineant valores reales, ponatur $c = h - \frac{B+q}{4h}$, eritque

$$CC - 16Dhh + 8Bhhq - 32h^4q - 4hhqq = 0.$$

Quo igitur quæſito ſatisfaciamus, duo caſus ſunt diſtinguendi, alter quo D eſt quantitas negativa, alter quo D eſt quantitas affirmativa. Sit igitur

I.

D quantitas affirmativa $= + EE$, ita ut conſtrui debeat hæc æquatio

$$x^4 * + Bx^2 - Cx + EE = 0,$$

ponatur ad hoc $q = 0$, ut ſit $c = \frac{4hh - B}{4h}$, fietque $hh =$

CC

$\frac{CC}{16EE}$ & $h = \frac{C}{4E}$; unde fit $c = \frac{CC - 4BE}{4CE}$, & porro CAP. XX.
$k = i = \frac{CC - 4BE}{4CE}$; $a = \frac{2EE}{C}$ & $f = 0$.

II.

Sit autem D quantitas negativa, puta $D = -EE$, ut construi debeat hæc æquatio

$$x^4 * + Bx^2 - Cx - EE = 0,$$

fiet $64cch^4 = CC + 4hh(4hh - B)^2 + 16EEhh$; quæ æquatio realem pro c valorem præbet, quicquid pro h assumatur: fiet enim $c = \frac{\sqrt{(CC + 4hh(4hh - B)^2 + 16EEhh)}}{8hh}$, atque h pro lubitu assumi potest; quovis igitur casu ita assumatur, ut facillima ipsius c constructio inde consequatur. Quo facto erit, ut ante, $AE = f = 0$, $CD + EF = k = \frac{4hh - B}{4h}$ & $AD = a = \frac{C}{8hh}$. Si ponatur $E = 0$, orietur constructio æquationis cubicæ

$$x^3 * + Bx - C = 0.$$

Hacque constructione nititur regula BACKERI vulgo satis nota.

496. Si sumantur duæ quæcunque Lineæ secundi ordinis seu Sectiones conicæ, quarum æquationes ad communem Axem idemque Abscissarum initium relatæ sint

$$ayy + byx + cxx + dy + ex + f = 0$$
&
$$\alpha yy + \beta yx + \gamma xx + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0.$$

Ex quibus, si methodo supra tradita y eliminetur, quod fiet istas æquationes comparando cum illis in §. 479. tractatis, scilicet

$$P + Qy + Ryy = 0$$
&
$$p + qy + ryy = 0,$$

fient P & p Functiones secundi ordinis ipsius x, Q & q Functiones primi ordinis, & R & r erunt constantes, unde colligitur æquatio resultans fore biquadratica. Atque adeo per intersectiones duarum quarumvis Sectionum conicarum altioris gradus æquationes construi nequeunt, quam biquadraticæ, quas autem per Circulum & Parabolam construi posse vidimus. Hoc idem vero intelligere licet ex natura Linearum secundi ordinis, quæ a recta Linea in duobus punctis secari possunt; unde duæ rectæ quatuor intersectiones formare poterunt, at duæ Lineæ rectæ junctim consideratæ speciem constituunt Linearum secundi ordinis; unde patet duas Lineas secundi ordinis se mutuo in quatuor punctis intersecare posse.

497. Adhibeantur ad intersectiones efficiendas duæ Lineæ, altera secundi, altera vero tertii ordinis, quæ exprimantur his æquationibus

$$P + Qy + Ryy = 0$$
&
$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Erit ergo P Functio duarum dimensionum ipsius x, Q Functio unius dimensionis, & R constans; tum vero p Functio trium dimensionum, q duarum, r unius dimensionis & s constans. Quarum ratio si in æquatione post eliminationem ipsius y orta (480.) habeatur, patebit eam fore ordinis sexti; quare per intersectiones Lineæ tertii ordinis cum Sectione conica altiores æquationes, quam sextæ potestatis construi non poterunt: quod idem ex natura utriusque ordinis patet, cum enim Lineæ tertii ordinis a Linea recta in tribus punctis intersecentur, eædem a duabus rectis, quæ junctim sumptæ speciem Linearum secundi ordinis constituunt, in sex punctis intersecabuntur

498. Si

498. Si tam eliminationes ſupra expoſitas, quam hoc ratiocinium ab interſectione rectarum petitum, ad altiores ordines transferamus, patebit per interſectiones duarum Linearum tertii ordinis conſtrui poſſe æquationes nonæ poteſtatis; per interſectiones duarum Linearum quarti ordinis autem æquationes poteſtatem ſextam decimam non ſuperantes. Atque in genere per duarum Linearum curvarum interſectiones, quarum altera ſit ordinis m altera ordinis n, conſtrui poterunt omnes æquationes poteſtatem mn non excedentes. Sic ad æquationem centeſimæ poteſtatis conſtruendam opus erit vel duabus Lineis decimi ordinis, vel duabus, quarum altera ſit quinti altera viceſimi ordinis, & ita porro; reſolvendo numerum 100. in duos Factores. Quod ſi autem æquationis conſtruendæ maxima poteſtas exponatur numero primo, vel alio commodos Factores non admittente, tum in ejus locum alius numerus major Factores habens idoneos ſubſtituatur; quibus enim binis Curvis æquationes majoris poteſtatis conſtrui poſſunt, iiſdem quoque æquationes inferioris cujuſque gradus conſtruentur. Sic ad æquationem gradus triceſimi noni adhiberi poterunt duæ Curvæ, altera ſexti altera ſeptimi ordinis; quia duabus hujuſmodi Curvis æquatio quadrageſimi ſecundi gradus conſtrui poteſt, hæcque conſtructio ſimplicior eſt cenſenda, quam ſi altera Curva ordinis tertii, altera decimi tertii aſſumeretur.

499. Ex his igitur perſpicuum eſt unamquamque æquationem pluribus, imo innumerabilibus, modis per interſectiones duarum Curvarum ita conſtrui poſſe, ut ejus radices reales aſſignentur. Ex quibus infinitis modis eum potiſſimum eligi conveniet, qui abſolvitur Lineis curvis cum ſimpliciſſimis tum deſcriptu facillimis; imprimis vero in id erit incumbendum, ut per interſectiones omnes radices reales exhibeantur; quod obtinetur, ſi ejuſmodi Curvæ aſſumantur, quæ interſectionibus imaginariis careant. Supra autem vidimus hujuſmodi interſectionibus imaginariis nullum relinqui locum, ſi in æquatione pro altera Curva Applicata y æquetur Functioni uniformi ipſius

x;

x; tum enim, quia hæc Curva nullas habet Applicatas imaginarias, fieri nequit ut interſectiones imaginariæ oriantur, quotcunque etiam Applicatis imaginariis altera Curva inquinetur. In hoc ergo conſtructionis negotio alteram Curvam perpetuo ita aſſumamus, ut ejus æquatio in hac forma $P + Qy = 0$, contineatur, denotantibus P & Q Functiones ipſius x.

500. Propoſita ergo quacunque æquatione eligatur una quædam conveniens Curva in æquatione $P + Qy = 0$. Et, quoniam æquatio pro altera Curva ita debet eſſe comparata, ut, ſi in ea loco y ſubſtituatur valor $\frac{-P}{Q}$, ipſa æquatio propoſita reſultet; ex ipſa propoſita viciſſim efformari poterit æquatio pro altera Curva, introducendo y loco $\frac{-P}{Q}$. Uti, ſi propoſita fuerit hæc æquatio $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, ſumatur Parabola pro altera Curva æquatione $ay = xx + bx$ contenta; ex qua, cum ſit $xx = ay - bx$, ſubſtituatur iſte valor in æquatione propoſita, quoties lubet; erit

$$\begin{aligned} x^4 &= aayy - 2abxy + bbxx \\ Ax^3 &= + Aaxy - Abxx \end{aligned}$$

ideoque obtinebitur hujuſmodi æquatio ſecundi ordinis

$$aayy + a(A - 2b)xy + (B - Ab + bb)xx + Cx + D = 0,$$

cujus adeo interſectiones cum Curva $ay = xx + bx$ indicabunt radices æquationis propoſitæ.

501. Quemadmodum hæ Curvæ ambæ determinandis pro arbitrio conſtantibus a & b infinitis modis variari poſſunt, ita multo major adhuc varietas induci poteſt. Cum enim ex æquatione priori ſit $xx - ay + bx = 0$; erit quoque $acxx - aacy + abcx = 0$, quæ ſi addatur ad poſteriorem æquationem, multo latius patens orietur æquatio pro Linea ſecundi ordinis, cujus interſectiones cum priori radices æquationis propoſitæ æque indicabunt. Ambæ ſcilicet iſtæ Curvæ conſtructioni inſervientes erunt I.

I.

$$ay = xx + bx$$

II.

$$aayy + a(A - 2b)xy + (B - Ab + bb + ac)xx - aacy + (C + abc)x + D = 0,$$

hæcque poſterior æquatio ita adornari poteſt, ut quamvis Sectionem conicam in ſe complectatur; attendendum ſcilicet eſt ad hanc quantitatem

$$AA - 4B - 4ac,$$

quæ ſi fuerit affirmativa, Curva erit Hyperbola; ſi fuerit $= 0$, Curva erit Parabola; ſin autem ſit quantitas negativa, Curva erit Ellipſis. Circulus vero erit hæc altera Curva ſi fuerit $b = \frac{1}{2}A$, & $aa = B - \frac{1}{4}AA + ac$, ſeu $c = a + \frac{AA}{4a} - \frac{B}{a}$: tum enim æquatio pro eo erit

$$aayy + aaxx - (a^3 + \frac{AAa}{4} - Ba)y + (C + \frac{Aaa}{2} + \frac{A^3}{8} - \frac{AB}{2})x + D = 0,$$

ſeu

$$(y - \frac{a}{2} - \frac{AA}{8a} + \frac{B}{2a})^2 + (x + \frac{C}{2aa} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16aa} - \frac{AB}{4aa})^2 =$$
$$(\frac{a}{2} + \frac{AA}{8a} + \frac{B}{2a})^2 + (\frac{C}{2aa} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16aa} - \frac{AB}{4aa})^2 - \frac{D}{aa},$$

ubi hoc membrum eſt quadratum Radii Circuli.

502. Sic igitur ex ſolis Sectionibus conicis habentur innumerabiles Curvæ, quæ cum Parabola $ay = xx + bx$ deſcriptæ, interſectionibus ſuis radices æquationis propoſitæ præbebunt. Harum ergo Curvarum quæcunque ſumatur, Parabola in iiſdem ſemper punctis interſecabitur; atque ideo illæ Curvæ omnes ſe mutuo in iiſdem punctis ſecabunt. Quocirca ex his Curvis infinitis duas quaſcunque aſſumere licebit, (prætermiſſa Parabola primum aſſumta,) quæ ſi ſuper communi Axe deſcribantur, per interſectiones ſuas radices æquationis propoſitæ ſemper indicabunt. Hocque adeo modo iſta æquatio conſtrui

LIB. II. poterit vel per Circulum & Parabolam, uti ſupra jam vidimus, vel per duas Parabolas, vel per Parabolam & Ellipſin, Hyperbolamve, vel per duas Ellipſes, vel per duas Hyperbolas, vel per Ellipſin cum Hyperbola. Multo magis autem varietas conſtructionum multiplicabitur, ſi etiam Curvæ altiorum ordinum in hunc finem adhiberi velint.

503. Simili modo conſtrui poterunt æquationes altiorum graduum, aſſumendo pro altera Curva Lineam parabolici generis æquatione $y = P$ contentam. Sic, ſi propoſita ſit æquatio conſtruenda

$$x^{12} - f^{10}x^2 + f^9 g x - g^{12} = 0,$$

ſumatur æquatio Parabolica ordinis quarti $x^4 = a^3 y$; &, cum ſit $x^{12} = a^9 y^3$, hoc termino ſubſtituto emerget æquatio pro Linea tertii ordinis

$$a^9 y^3 - f^{10}x^2 + f^9 g x - g^{12} = 0;$$

ex qua, ſi ad eam addatur multiplum quodcunque prioris æquationis $x^4 - a^3 y = 0$, innumerabiles formabuntur Lineæ quarti ordinis, quarum binæ quævis conjunctæ æquationem propoſitam conſtruent.

504. Quod ſi eveniat, ut ex æquatione conſtruenda propoſita non ſatis idonea conſtructio præcedente methodo derivari queat; tum æquatio propoſita multiplicetur per x, vel x^2, vel x^3, vel altiorem quampiam poteſtatem ipſius x; ita ut ad ejus radices aliquot inſuper radices evaneſcentes addantur, quæ per interſectiones in ipſo Abſciſſarum initio factas indicabuntur, ideoque a reliquis radicibus veris æquationis propoſitæ facile diſcernentur. Sic igitur æquatio propoſita altioris ſit gradus, hoc tamen non obſtante ſæpenumero commodior conſtructio obtinebitur. Ita, ſi exempli gratia propoſita fuerit æquatio cubica

$$x^3 + Axx + Bx + C = 0;$$

quæ, poſito $xx = ay$, ita ut altera Curva conſtruens futura ſit

ſit Parabola, altera erit ſemper Hyperbola; prodibit enim, loco xx ſubſtituto ay, hæc æquatio

$$axy + Aay + Bx + C = 0;$$

vel, addita æquatione priore $cxx - acy = 0$, naſcetur hæc latius patens

$$axy + cxx + a(A - c)y + Bx + C = 0,$$

quæ quoque perpetuo eſt pro Hyperbola. Quod ſi ergo Circulum vel Ellipſin vel Parabolam adhibere commodius videatur, tum æquatio propoſita multiplicetur per x, ut habeatur hæc æquatio

$$x^4 + Ax^3 + Bxx + Cx = 0,$$

quæ, ſi cum æquatione biquadratica ſupra conſtructa comparetur, erit $D = 0$, hæcque æquatio ſemper per Circulum & Parabolam conſtrui poterit.

505. Quoniam ergo omnis æquatio cujuſque gradus per interſectiones duarum Curvarum algebraïcarum conſtrui poteſt, idque infinitis modis, Lineam quamcunque in locum alterius Curvæ ſubſtituere licebit: hincque enata eſt quæſtio, quemadmodum data æquatio ope datæ Curvæ conſtrui queat. Hic autem primum notandum eſt datam Curvam ex eo genere eſſe debere, ut ejus Applicata exprimatur per Functionem uniformem ipſius x, ne interſectiones imaginariæ conſtructionem perturbent. Neque enim ſufficeret, ut Curva, vel tantum portio Curvæ propoſita, habeat Abſciſſas uni radici æquationis æquales; quæ conditio, ſi quidem una tantum radix æquationis propoſitæ deſideretur, adjici eſt ſolita; fieri enim poſſet, ut iſte arcus Curvæ nullam patiatur interſectionem, etiamſi Abſciſſa cuipiam ipſius puncto reſpondens ſit vera radix; quoniam hæc radix vel per interſectionem imaginariam, vel per alius rami eidem Abſciſſæ reſpondentis interſectionem

Lib. II. indicari posset. Quam ob causam huic quæstioni, curiosæ magis quam utili, non immoror, cum vera fundamenta omnium hujusmodi constructionum satis fuse ostenderim.

CAPUT XXI.

De Lineis curvis transcendentibus.

506. Hactenus de Lineis curvis algebraïcis egimus, quæ ita sunt comparatæ, ut, sumtis Abscissis in Axe quocunque, Applicatæ respondentes exprimantur per Functiones algebraïcas Abscissarum; seu, quod eodem redit, in quibus relatio inter Abscissas & Applicatas exprimi possit per æquationem algebraïcam. Hinc itaque sponte sequitur, si valor Applicatæ per Functionem algebraïcam Abscissæ explicari nequeat, Lineam curvam algebraïcis annumerari non posse. Hujusmodi autem Lineæ curvæ, quæ algebraïcæ non sunt, *transcendentes* vocari solent. Linea igitur transcendens ita definitur, ut ejusmodi Curva esse dicatur, in qua relatio inter Abscissas & Applicatas æquatione algebraïca exprimi nequeat. Quoties ergo Applicata y Functioni transcendenti ipsius Abscissæ x æquatur, toties Linea curva ad genus transcendentium erit referenda.

507. In superiori Sectione duas potissimum species quantitatum transcendentium evolvimus, quarum altera Logarithmos, altera Arcus circulares seu angulos, complectebatur. Quod si ergo Applicata y sit æqualis vel Logarithmo ipsius Abscissæ x, vel Arcui Circuli, cujus sinus, seu cosinus, seu tangens per Abscissam x exprimitur, ita ut sit $y = lx$, vel $y = A.sin.x$, vel $y = A.cos.x$, vel $y = A.tang.x$, vel, si hujusmodi valores tantum in æquationem inter x & y ingrediantur, tum Curva erit transcendens. Sunt autem hæ Curvæ tantum species transcendentium: præter istas enim dantur innumerabiles aliæ expressiones

pressiones transcendentes, quarum origo in Analysi infinitorum fusius exponetur, ita ut numerus Curvarum transcendentium longe superet numerum Curvarum algebraïcarum. Cap. XXI.

508. Quæcunque Functio non est algebraïca, ea est transcendens: ideoque Curvam, in cujus æquationem ingreditur, reddit transcendentem. Æquatio autem algebraïca, vel est rationalis, nullosque exponentes præter numeros integros continet, vel est irrationalis, atque exponentes fractos complectitur; hoc autem posteriori casu semper ad rationalitatem revocari potest. Cujus igitur Curvæ æquatio relationem inter Coordinatas x & y exprimens ita est comparata, ut neque sit rationalis, neque ad rationalitatem perduci possit, ea semper est transcendens. Quod si ergo in æquatione ejusmodi potestates occurrant, quarum exponentes neque sint numeri integri neque fracti, ad rationalitatem nullo modo perduci poterit; ideoque Curvæ talibus æquationibus contentæ erunt transcendentes. Hinc nascitur prima species & quasi simplicissima Curvarum transcendentium, in quarum æquationibus insunt exponentes irrationales; quæ quia neque Logarithmos neque Arcus circulares involvunt, sed ex sola numerorum irrationalium notione nascuntur, magis quodammodo ad Geometriam communem pertinere videntur, & hanc ob rem ab LEIBNITIO *interscendentes* sunt appellatæ, quasi medium tenerent inter algebraïcas & transcendentes.

509. Hujusmodi ergo Curva interscendens erit, quæ continetur æquatione $y = x^{\sqrt{2}}$; quomodocunque enim hæc æquatio potestatibus sumendis evehatur, nunquam ad rationalitatem perducetur. Talis æquatio autem nulla via geometrica construi potest. Geometrice enim nullæ aliæ potestates exhiberi possunt, nisi quarum exponentes sint numeri rationales, hancque ob causam istiusmodi Curvæ ab algebraïcis maxime discrepant. Si enim exponentem $\sqrt{2}$ tantum vero proxime exhibere velimus, ejus loco ponendo aliquam ex his fractio-

 nibus $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{17}{12}$; $\frac{41}{29}$; $\frac{99}{70}$, quæ valorem $\sqrt{2}$ proxime exprimunt, Curvæ quidem algebraïcæ prodibunt ad quæſitam proxime accedentes, at ordinis erunt vel tertii, vel ſeptimi, vel decimi ſeptimi, vel quadrageſimi primi, &c. Quare, cum $\sqrt{2}$ rationaliter exprimi nequeat niſi per fractionem, cujus numerator & denominator ſint numeri infinite magni, hæc Curva ordini Linearum infiniteſimo erit accenſenda, ideoque pro algebraïca haberi non poterit. Huc accedit, quod $\sqrt{2}$ duplicem involvat valorem, alterum affirmativum alterum negativum, ex quo y duplicem perpetuo ſortietur valorem, ſicque gemina Curva reſultabit.

510. Deinde vero ſi hanc Curvam exacte conſtruere velimus, id ſine Logarithmorum beneficio præſtare non poſſumus. Cum enim ſit $y = x^{\sqrt{2}}$, erit, Logarithmis ſumendis, $ly = \sqrt{2}.lx$, cujusvis ergo Abſciſſæ Logarithmus per $\sqrt{2}$ multiplicatus dabit Logarithmum Applicatæ; unde ad quamvis Abſciſſam x reſpondens Applicata ex canone Logarithmorum aſſignabitur. Sic, ſi fuerit $x = 0$, erit $y = 0$: ſi $x = 1$, erit $y = 1$; qui valores ex æquatione facillime fluunt: at, ſi $x = 2$, erit $ly = \sqrt{2}.l2 = \sqrt{2}.0,3010300$: &, ob $\sqrt{2} = 1,41421356$, erit $ly = 0,4257274$, ideoque proxime $y = 2,665186$: & ſi $x = 10$, erit $ly = 1,4142356$, hincque $y = 25,955870$. Hoc igitur modo ad ſingulas Abſciſſas Applicatæ ſupputari, atque adeo Curva conſtrui poterit, ſi quidem Abſciſſæ x valores affirmativi tribuantur. Sin autem Abſciſſa x valores obtineat negativos, tum difficile eſt dictu utrum valores ipſius y, futuri ſint reales an imaginarii: ſit enim $x = -1$, & quid ſit $(-1)^{\sqrt{2}}$ definiri non poterit, quoniam approximationes ad valorem $\sqrt{2}$ nihil adjumenti afferunt.

511. Multo minus erit dubitandum, quin æquationes, in quibus adeo exponentes imaginarii reperiuntur, ad genus tranſcendentium referri debeant. Fieri autem omnino poteſt, ut expreſſio

expreſſio continens exponentes imaginarios valorem realem atque determinatum exhibeat. Hujus rei exempla ſupra jam occurrerunt; unde hic ſufficiat unum exemplum attuliſſe hoc Cap. XXI.

$$2y = x^{+\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}},$$

in quo, etiamſi utrumque membrum $x^{+\sqrt{-1}}$ & $x^{-\sqrt{-1}}$ ſit quantitas imaginaria, tamen ſumma amborum valorem habet realem. Sit enim $lx = v$, ſumto e pro numero, cujus Logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$, erit $x = e^{v}$, quo valore loco x ſubſtituto, erit $2y = e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}$. Vidimus autem in Sectione ſuperiori §. 138. eſſe

$$\frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} = cof.\,A.\,v,$$

unde fiet $y = cof.\,A.\,v = cof.\,A.\,lx$. Scilicet, propoſito quocunque ipſius x valore in numeris, ſumatur ejus Logarithmus hyperbolicus, tum in Circulo, cujus radius $= 1$, abſcindatur Arcus iſti Logarithmo æqualis, hujuſque Arcus coſinus dabit valorem Applicatæ y. Sic, ſi ſumatur $x = 2$, ut ſit $2y = 2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}$, erit $y = cof.\,A.\,l2 = cof.\,A.\,0,6931471805599$. Iſte autem Arcus ipſi $l2$ æqualis, cum Arcus $= 3,1415926535$ &c., contineat $180°$, per regulam auream invenietur fore $39°, 42', 51'', 52''', 9''''$, cujus coſinus eſt $0,76923890135408$, hicque numerus dat valorem Applicatæ y reſpondentem Abſciſſæ $x = 2$. Cum igitur hujuſmodi expreſſiones & Logarithmos & Arcus circulares involvant, jure ad tranſcendentes referuntur.

512. Inter Curvas ergo tranſcendentes primum locum tenent, quarum æquationes, præter quantitates algebraicas, Loga-

LIB. II. Logarithmos involvunt, atque ſimpliciſſima harum erit quæ continetur hac æquatione $l\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$, ſeu $x = bl\frac{y}{a}$, ubi perinde eſt cujuſnam generis Logarithmi accipiantur, quia multiplicatione conſtantis b omnia Logarithmorum ſyſtemata ad idem revocantur. Denotet ergo character l Logarithmos hyperbolicos, atque Curva æquatione $x = bl\frac{y}{a}$ contenta ſub nomine LOGARITHMICÆ vulgo eſt nota. Sit e numerus, cujus Logarithmus eſt $= 1$, ita ut ſit $e = 2,71828182845904523536028$, fietque $e^{x:b} = \frac{y}{a}$; ſeu $y = ae^{x:b}$, ex qua æquatione natura Curvæ logarithmicæ facillime cognoſcitur. Si enim loco x ſucceſſive ſubſtituantur valores in arithmetica progreſſione procedentes, Applicatæ y valores tenebunt inter ſe progreſſionem geometricam. Quæ quo facilius ad conſtructionem accommodetur, ponatur $e = m^n$, & $b = nc$, eritque $y = am^{x:c}$, ubi m numerum quemcunque affirmativum unitate majorem ſignificare poteſt. Si igitur ſit

$$x = 0,\ c,\ 2c,\ 3c,\ 4c,\ 5c,\ 6c,\ \&c.$$

erit

$$y = a,\ am,\ am^2,\ am^3,\ am^4,\ am^5,\ am^6,\ \&c.;$$

&, tribuendis ipſi x valoribus negativis, ſi ponatur

$$x = -c,\ -2c,\ -3c,\ -4c,\ -5c,\ \&c.$$

erit

$$y = \frac{a}{m},\ \frac{a}{m^2},\ \frac{a}{m^3},\ \frac{a}{m^4},\ \frac{a}{m^5},\ \&c.$$

TAB. XXIV. Fig. 101. 513. Hinc patet Applicatas y ubique valores habere affirmativos, & quidem in infinitum creſcentes, auctis Abſciſſis x affirmative in infinitum; ex altera autem Axis parte in infinitum

nitum decrescentes, ita ut hinc Axis sit Curvæ Asymtota Ap. Sumto scilicet A pro Abscissarum initio, erit hoc loco Applicata $AB = a$: &, sumta Abscissa $AP = x$, erit Applicata $PM = y = am^{x:c} = ae^{x:b}$: ideoque $l.\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$. Unde Abscissa AP per constantem b divisa exprimit Logarithmum rationis $\frac{PM}{AB}$. Si Abscissarum initium in alio quocunque Axis puncto a statuatur, æquatio similis manet. Sit enim $Aa = f$, ac posita $aP = t$, ob $x = t - f$, erit $y = ae^{(t-f):b} = ae^{t:b} : e^{f:b}$. Vocetur constans $a : e^{f:b} = g$, erit $y = ge^{t:b}$. Hinc, ob $ab = g$, intelligitur fore $\frac{aP}{b} = l.\frac{PM}{ab}$; ideoque ductis duabus quibusvis Applicatis PM & pm, intervallo Pp a se invicem distantibus, erit $\frac{Pp}{b} = l.\frac{PM}{pm}$, & constans b, a qua ista relatio pendet, erit instar Parametri Logarithmicæ. Cap. XXI.

514. Tangens hujus Curvæ logarithmicæ in quovis puncto M etiam facile poterit definiri. Cum enim, posita $AP = x$, sit $PM = ae^{x:b}$, ducatur alia quæcunque Applicata QN, a priori intervallo $PQ = u$ dissita, eritque $QN = ae^{(x+u):b} = ae^{x:b}.e^{u:b}$; &, ducta ML Axi parallela, erit $LN = (QN - PM) = ae^{x:b}(e^{u:b} - 1)$. Per puncta M & N ducatur recta NMT Axi occurrens in puncto T, erit $LN : ML = PM : PT$, hincque $PT = u : (e^{u:b} - 1)$. Verum, uti in Sectione superiori ostendimus, per Seriem infinitam est $e^{u:b} = 1 + \frac{u}{b} + \frac{u^2}{2b^2} + \frac{u^3}{6b^3} + \&c.$: ideoque $PT =$

LIB. II. $\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{u}{2b^2}+\frac{uu}{6b^3}+\&c.}$. Evanescat jam intervallum $PQ = u$; &, ob puncta M & N coincidentia, recta NMT fiet Curvæ Tangens, eritque tum Subtangens $PT = b$, ideoque constans; quæ est proprietas palmaria Curvæ logarithmicæ. Parameter ergo Logarithmicæ b simul ejusdem est Subtangens constantis ubique magnitudinis.

515. Quæstio hic oritur, utrum hoc modo tota Curva logarithmica sit descripta; & an ea, præter hunc ramum MBm utrinque in infinitum excurrentem, nullas alias habeat partes. Vidimus enim supra nullam dari Asymtotam, ad quam non duo rami convergant. Statuerunt ergo nonnulli, Logarithmicam ex duabus constare partibus similibus ad utramque Axis partem sitis, ita ut Asymtota simul futura sit Diameter. Verum æquatio $y = a e^{x:b}$ hanc proprietatem minime ostendit; quoties enim est $\frac{x}{b}$ vel numerus integer, vel fractio denominatorem habens imparem, tum y unicum habet valorem realem eumque affirmativum. Quod si autem fractio $\frac{x}{b}$ habeat denominatorem parem, tum Applicata y geminum induet valorem, alterum affirmativum alterum negativum, hicque Curvæ punctum ad alteram Asymtotæ partem exhibebit: ex quo Logarithmica infra Asymtotam innumerabilia habebit puncta discreta, quæ Curvam continuam non constituunt, etiamsi ob intervalla infinite parva Curvam continuam mentiantur; quod est paradoxon in Lineis algebraïcis locum nullum inveniens. Hinc etiam aliud oritur paradoxon multo magis mirandum. Cum enim numerorum negativorum Logarithmi sint imaginarii, (quod tum per se patet, tum inde intelligitur quod $log. -1$ ad $\sqrt{-1}$ rationem habeat finitam) erit $l. -n$, quantitas imaginaria, quæ sit $= i$: at, cum Logarithmus quadrati æquetur duplo Logarithmo radicis, erit $l.(-n)^2 = l.n^2 =$

2 i,

$2i$. At, $log.\, n^2$ est quantitas realis, $= 2\,l.\,n$: unde sequitur, & quantitatem realem $l.n$ & imaginariam i fore semissem ejusdem quantitatis realis $l.n^2$. Hinc porro quilibet numerus duplicem habiturus esset semissem, alteram realem alteram imaginariam; similiterque cujusque numeri triplex daretur triens, quadruplex quadrans, & ita porro, quarum tamen partium, unica tantum sit realis, quæ quomodo cum solita quantitatum notione conciliari queant, non liquet. Cap. XXI.

516. Concessis ergo his quæ assumsimus, sequeretur numeri a semissem fore æque $\frac{a}{2} + l. -1$, ac $\frac{a}{2}$: illius enim duplum est $a + 2l - 1 = a + l.(-1)^2 = a + l.\,1 = a$: ubi notandum est esse $+ l. -1 = - l. -1$, etiamsi non sit $l. -1 = 0$: cum enim sit $-1 = \frac{+1}{-1}$, erit $l. -1 = l. +1 - l. -1 = - l. -1$. Simili modo, cum sit $\sqrt[3]{1}$ non solum 1 sed etiam $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, erit $3l. \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = l.\,1 = 0$, ideoque ejusdem quantitatis a trientes erunt $\frac{a}{3}$; $\frac{a}{3} + l. \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, & $\frac{a}{3} + l. \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$; tripla enim harum singularum expressionum producunt eandem quantitatem a. Ad hæc dubia solvenda, quæ nullo modo admitti posse videntur, aliud statui oportet paradoxon: scilicet, cujusque numeri infinitos dari Logarithmos, inter quos plus uno reali non detur. Sic, etsi Logarithmus unitatis est $= 0$, tamen præterea innumerabiles alii unitatis dantur Logarithmi imaginarii: qui sunt $2l. -1$, $3\,l. \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, $4\,l. -1$; & $4\,l. \pm \sqrt{-1}$, innumerabilesque alii, quos extractio radicum monstrat. Hæc autem sententia multo est verisimilior, quam superior: posito enim $x = l.a$, erit $a = e^x$; ideoque $a = 1 + x + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} +$ &c.; quæ, cum sit æquatio

 infinita-

LIB. II. infinitarum dimenſionum, mirum non eſt ſi x habeat radices infinitas. Quanquam autem ſic poſterius paradoxon reſolvimus, tamen prius ſuam vim retinet, qua ad Logarithmicam infra Axem innumerabilia puncta diſcreta pertinere oſtendimus.

517. Multo evidentius autem hujuſmodi infinitorum punctorum diſcretorum exiſtentia monſtrari poteſt, per hanc æquationem $y = (-1)^x$: quoties enim x eſt numerus, vel integer par vel fractus habens numeratorem parem, erit $y = 1$: ſin autem x ſit numerus vel integer impar vel fractus, cujus tam numerator quam denominator ſint numeri impares, erit $y = -1$, reliquis caſibus omnibus, quibus vel x eſt fractio denominatorem parem habens, vel adeo numerus irrationalis, valor ipſius y erit imaginarius. Æquatio ergo $y = (-1)^x$ exhibebit innumerabilia puncta diſcreta ad utramque Axis partem intervallo $= 1$ poſita, quorum ne bina quidem ſunt contigua, hoc tamen non obſtante, quæque bina ad eandem Axis partem ſita, ſibi tam erunt propinqua, ut intervallum ſit data quavis quantitate aſſignabili minus. Inter duos enim Abſciſſæ valores quantumvis propinquos, non ſolum una ſed infinitæ fractiones exhiberi poſſunt, quarum denominatores ſint impares, ex his autem ſingulis naſcuntur puncta ad æquationem propoſitam pertinentia: mentientur ergo hæc puncta duas Lineas rectas Axi parallelas ab eo utrinque intervallo $= 1$ diſſitas, in his enim Lineis nullum intervallum exhiberi poteſt in quo non unum, imo infinita puncta, æquatione $y = (-1)^x$ contenta, aſſignari queant. Hæc eadem anomalia uſuvenit in æquatione $y = (-a)^x$, aliiſque huic ſimilibus, ubi quantitas negativa ad exponentem indeterminatum elevatur. Hujuſmodi ergo paradoxa, quæ in Curvis tantum tranſcendentibus locum habere poſſunt, hic expoſuiſſe neceſſe erat.

518. Ad

518. Ad hoc ergo genus Curvarum a Logarithmis pendentium pertinent omnes æquationes, in quibus non solum Logarithmi occurrunt, sed etiam exponentes variabiles, quippe qui a Logarithmis ad numeros progrediendo oriuntur, unde istæ Curvæ etiam *exponentiales* vocari solent. Hujusmodi ergo Curva erit, quæ in hac æquatione $y = x^x$, seu $ly = xlx$ continetur. Posito ergo $x = 0$, erit $y = 1$; si $x = 1$ erit $y = 1$; si $x = 2$, erit $y = 4$; si $x = 3$, erit $y = 27$, &c. Unde *BDM* exprimet formam hujus Curvæ ad Axem *AP* relatæ, ita ut, sumta $AC = 1$, sit $AB = CD = 1$. Intra *A* & *C* autem Applicatæ erunt unitate minores; si enim sit $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071068$: minima vero erit Applicata si capiatur Abscissa $x = \frac{1}{e} = 0,36787944$, fietque tum Applicata $y = 0,6922005$, uti in sequentibus docebitur. Quemadmodum autem hæc Curva ultra *B* sit comparata ut videamus, Abscissa x facienda est negativa, eritque $y = \frac{1}{(-x)^x}$, unde ista pars ex meris punctis discretis constabit, ad Axem tanquam Asymtotam convergentibus. Cadent autem hæc puncta ad utramque Axis partem, prout x fuerit numerus vel par vel impar. Quin etiam infra Axem *AP* infinita hujusmodi puncta cadent, si pro x sumatur fractio denominatorem habens parem; posito enim $x = \frac{1}{2}$, erit & $y = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ & $y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. Curva ergo continua *MDB* in *B* subito terminatur, contra indolem Linearum algebraïcarum: loco continuationis autem habebit puncta illa discreta; unde realitas istorum punctorum quasi conjugatorum eo luculentius perspicitur. Nisi enim hæc adesse concedantur, statui deberet, totam Curvam in puncto *B* subito cessare, id quod esset legi continuitatis contrarium, ideoque absurdum.

CAP. XXI.

TAB. XXIV. Fig. 102.

519. Inter infinitas alias hujus generis Curvas, quarum con-

LIB. II. ſtructio per Logarithmos effici poteſt, dantur ejuſmodi, quarum conſtructio non tam facile patet, quæ tamen ope idoneæ ſubſtitutionis abſolvi queat. Talis eſt Curva æquatione $x^y = y^x$ contenta; ex qua quidem ſtatim perſpicitur, Applicatam y perpetuo æqualem eſſe Abſciſſæ x, ita ut recta ad Axem ſub angulo ſemirecto inclinata æquationi ſatisfaciat. Interim tamen manifeſtum eſt hanc æquationem latius patere, quam æquationem pro recta $y = x$; neque igitur hanc vim æquationis $x^y = y^x$ exhaurire: ſatisfieri enim huic æquationi poteſt, etiamſi non ſit $x = y$; quoniam, ſi $x = 2$, etiam eſſe poteſt

TAB. XXV. Fig. 103. $y = 4$. Præter rectam ergo EAF, æquatio propoſita alias complectetur partes; ad quas inveniendas, ideoque ad totam Lineam æquatione contentam exhibendam, ponamus $y = tx$, ut ſit $x^{tx} = t^x x^x$: unde, radice poteſtatis x extrahenda, erit $x^t = tx$ & $x^{t-1} = t$; ideoque habebitur $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ & $y = t^{\frac{t}{t-1}}$. Vel, poſito $t - 1 = \frac{1}{u}$, erit $x = (1 + \frac{1}{u})^u$ & $y = (1 + \frac{1}{u})^{u+1}$. Hinc Curva, præter rectam EAF, habebit ramum RS ad rectas AG & AH, tanquam Aſymtotas, convergentem, cujus recta AF erit Diameter. Secabit autem Curva rectam AF in puncto C ita ut ſit $AB = BC = e$, denotante e numerum cujus Logarithmus eſt unitas. Inſuper autem æquatio ſuppeditat innumerabilia puncta diſcreta, quæ cum recta EF, & Curva RCS æquationem exhauriunt. Hinc ergo innumerabilia binorum numerorum x & y paria exhiberi poſſunt ut ſit $x^y = y^x$, tales enim numeri in rationalibus erunt

$x = 2$

$$x = 2 \qquad\qquad y = 4$$
$$x = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} \qquad\qquad y = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$
$$x = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} \qquad\qquad y = \frac{4^4}{3^4} = \frac{256}{81}$$
$$x = \frac{5^4}{4^4} = \frac{625}{256} \qquad\qquad y = \frac{5^5}{4^5} = \frac{3125}{1024}$$
$$\&c. \qquad\qquad \&c.$$

horum ſcilicet binorum numerorum alter ad alterum elevatus eandem quantitatem producit: ſic erit

$$2^4 = 4^2 = 16$$
$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{27}{4}}$$
$$\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{256}{81}} = \left(\frac{256}{81}\right)^{\frac{64}{27}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{256}{27}}$$
$$\&c.$$

520. Quanquam in his ſimilibuſque aliis Curvis infinita puncta algebraïce poſſunt determinari, minime tamen Curvis algebraïcis annumerari poſſunt, quoniam innumerabilia alia extant puncta, quæ algebraïce nullo modo exhiberi poſſunt. Tranſeamus ergo ad alterum Curvarum tranſcendentium genus, quod Arcus circulares requirit: hic autem perpetuo radium Circuli, cujus Arcus conſtructionem ingrediuntur, unitate exprimo, ne pluribus characteribus calculus perturbetur. Curvas autem ad hoc genus pertinentes non eſſe algebraïcas facile oſtendi poteſt, etiamſi impoſſibilitas quadraturæ Circuli nondum ſit evicta. Conſideremus enim ſimpliciſſimam tantum hujus generis æquationem hanc $\frac{y}{a} = A.\,\mathit{ſin.}\,\frac{x}{c}$; ita ut Applicata y ſit proportionalis Arcui Circuli, cujus Sinus eſt $\frac{x}{c}$. Quoniam enim eidem Sinui $\frac{x}{c}$ innumerabiles Arcus conveniunt,

LIB. II. niunt, Applicata y erit Functio infinitinomia; ideoque tam ipsa quam aliæ rectæ Curvam in infinitis punctis secabunt, quæ proprietas istam Curvam ab algebraïcis clarissime distinguit. Sit s minimus Arcus sinui $\frac{x}{c}$ conveniens, & denotet π semicircumferentiam Circuli, erunt valores ipsius $\frac{y}{a}$ sequentes

$$s;\ \pi - s;\ 2\varpi + s;\ 3\pi - s;\ 4\pi + s;\ 5\pi - s;\ \&c.$$
$$-\pi - s; -2\varpi + s; -3\pi - s; -4\pi + s; -5\pi - s;\ \&c.$$

TAB. XXV. Fig. 104. Sumta ergo recta CAB pro Axe, & A pro Abscissarum principio; erunt primo, posito $x = 0$, Applicatæ $AA^1 = \pi a$, $AA^2 = 2\pi a$, $AA^3 = 3\pi a$; &c. Itemque ex altera parte $AA^{-1} = \pi a$, $AA^{-2} = 2\pi a$, $AA^{-3} = 3\pi a$, &c.: atque per singula hæc puncta Curva transibit. Sumta vero Abscissa $AP = x$, Applicata Curvam in infinitis punctis M secabit, eritque $PM^1 = as$, $PM^2 = a(\varpi - s)$, $PM^3 = a(2\varpi + s)$, &c. Curva ergo tota ex infinitis portionibus AE^1A^1; $A^1F^1A^2$; $A^2E^2A^3$; $A^3F^2A^4$; &c., similibus erit composita; ita ut singulæ rectæ Axi BC parallelæ, quæ per puncta E & F ducuntur, futuræ sint Curvæ diametri. Erit vero $AC = AB = c$, & intervalla E^1E^2, E^2E^3, E^1E^{-1}, $E^{-1}E^{-2}$, itemque F^1F^2, F^1F^{-1}, $F^{-1}F^{-2}$, erunt singula æqualia $2a\varpi$. Curva hæc a LEIBNITIO est vocata *Linea Sinuum*, quoniam ejus ope cujusque Arcus sinus facile invenitur. Cum enim sit $\frac{y}{a} = \text{A}.\, \mathit{sin}.\, \frac{x}{c}$, erit vicissim $\frac{x}{c} = \mathit{sin}.\, \text{A}.\, \frac{y}{a}$. Si ponatur $\frac{y}{a} = \frac{1}{2}\pi - \frac{z}{a}$, fiet $\frac{x}{c} = \mathit{cof}.\, \text{A}.\, \frac{z}{a}$; sicque simul habetur *Linea Cosinuum*.

521. Simili modo ex hac consideratione oritur *Linea Tangentium*, cujus æquatio erit $y = \text{A}.\mathit{tang}.\, x$, positis brevitatis ergo $a = 1$ & $c = 1$; hinc ergo convertendo fit $x = \mathit{tang}.\text{A}.\, y = \frac{\mathit{sin}.\, y}{\mathit{cof}.\, y}$, cujus Curvæ figura facile ex natura Tangentium colligitur.

colligitur. Habebit autem infinitas Asymtotas inter se parallelas. Pari modo describi poterit *Linea Secantium* ex æquatione $y = A.sec.x$, seu $x = sec.A.y = \frac{1}{cos.y}$, quæ etiam infinitos ramos habet in infinitum excurrentes. Maxime vero ex hoc Curvarum genere innotuit CYCLOIS, seu *Trochois*, quæ describitur a puncto in peripheria Circuli super linea recta rotando progredientis, cujus æquatio inter Coordinatas orthogonales est $y = \sqrt{(1 - xx)} + A.cos.x$. Curva hæc, cum ob descriptionis facilitatem tum ob plurimas, quibus gaudet, insignes proprietates, maxime est notatu digna. Quoniam autem pleræque sine Analysi infinitorum explicari nequeunt, hic tantum præcipuas, quæ ex descriptione immediate fluunt, breviter perpendamus. CAP. XXI.

522. Rotetur ergo Circulus ACB super recta EA; atque, ut investigatio latius pateat, non punctum Peripheriæ B sed punctum Diametri productæ D quodcumque describat Lineam curvam Dd. Sit hujus Circuli radius $CA = CB = a$, distantia $CD = b$, atque in hoc quidem situ punctum D locum obtineat summum. Pervenerit inter rotandum Circulus in situm $aQbR$; ac, posito spatio $AQ = z$, erit Arcus $aQ = z$, qui divisus per radium a dabit angulum $acQ = \frac{z}{a}$, & punctum describens erit in d, ut sit $cd = b$, angulus $dcQ = \pi - \frac{z}{a}$; & d erit punctum in Curva quæsita. Ducatur ex d primum in rectam AQ normalis dp, tum in rectam QR normalis dn; erit $dn = b.sin.\frac{z}{a}$, & $cn = -b.cos.\frac{z}{a}$: ergo $Qn = dp = a + b.cos.\frac{z}{a}$. Producatur dn donec rectæ AD occurrat in P; ac vocentur Coordinatæ $DP = x$, $Pd = y$; erit $x = b + cn$; seu $x = b - b.cos.\frac{z}{a}$; & $y = AQ + dn = z + b.sin.\frac{z}{a}$. Cum igitur TAB. XXV. Fig. 105.

 sit

LIB. II. sit $b.\cos.\frac{z}{a} = b - x$, erit $b.\sin.\frac{z}{a} = \sqrt{(2bx - xx)}$ & $z = a\,\mathrm{A}.\cos.(1 - \frac{x}{b}) = a\,\mathrm{A}.\sin.\frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$; quibus valoribus substitutis, erit $y = \sqrt{(2bx - xx)} + a\,\mathrm{A}.\sin.\frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$. Vel, si Abscissæ in Axe AD a Centro computentur voceturque $b - x = t$, erit $\sqrt{(2bx - xx)} = \sqrt{(bb - tt)}$, & inter t & y habebitur æquatio ista

$$y = \sqrt{(bb - tt)} + a\,\mathrm{A}.\cos.\frac{t}{b},$$

quæ æquatio dat Cycloidem *ordinariam*, si fuerit $b = a$; sin autem sit vel b major quam a, vel b minor quam a, Curva vocatur Cyclois vel *curtata* vel *elongata*. Semper autem erit y Functio infinitiplex ipsius x, vel t; seu, quælibet recta basi AQ parallela Curvam in infinitis punctis secabit, nisi ejus distantia x vel t fuerit tanta, ut $\sqrt{(2bx - xx)}$ vel $\sqrt{(bb - tt)}$ fiat imaginaria quantitas.

TAB. XXVI. Fig. 106. 523. Inter Curvas hujus generis, quæ imprimis sunt cognitæ, referri debent *Epicycloides* & *Hypocycloides*, quæ oriuntur si Circulus ACB super Peripheria alterius Circuli OAQ rotatur, intereaque punctum quodpiam D, vel extra vel intra Circulum mobilem sumtum, Curvam Dd describit. Ponatur Circuli immoti radius $OA = c$, radius Circuli mobilis $CA = CB = a$, & distantia puncti describentis $CD = b$; sumatur autem recta OD pro Axe Curvæ quæsitæ Dd. A situ hoc initiali, quo puncta O, C, D in directum jacent, processerit Circulus mobilis in situm QcR, descripto Arcu $AQ = z$, ita ut sit angulus $AOQ = \frac{z}{c}$. Erit ergo Arcus $Qa = AQ = z$; hincque angulus $acQ = \frac{z}{a} = Rcd$: &, sumta recta $cd = CD = b$, erit d punctum in Curva Dd. Ex eo in Axem demittatur perpendiculum dP; itemque ex c perpendi-

perpendiculum cm & cn parallela Axi OD. Ergo, ob angulum $Rcn = AOQ = \frac{z}{c}$, erit angulus $dcn = \frac{z}{c} + \frac{z}{a} = \frac{(a+c)z}{ac}$. Unde obtinetur $dn = b.\mathit{fin}.\frac{(a+c)z}{ac}$, & $cn = b.\mathit{cof}.\frac{(a+c)z}{ac}$. Deinde, ob $OC = Oc = a + c$, erit $cm = (a+c).\mathit{fin}.\frac{z}{c}$, & $Om = (a+c).\mathit{cof}.\frac{z}{c}$. Vocatis ergo Coordinatis $OP = x$, & $Pd = y$, erit $x = (a+c).\mathit{cof}.\frac{z}{c} + b.\mathit{cof}.\frac{(a+c)z}{ac}$, & $y = (a+c).\mathit{fin}.\frac{z}{c} + b.\mathit{fin}.\frac{(a+c)z}{ac}$. Hinc patet, ſi $\frac{a+c}{a}$ fuerit numerus rationalis, tum ob commenſurabilitatem angulorum $\frac{z}{c}$ & $\frac{(a+c)z}{ac}$, ipſam incognitam z eliminari, ideoque æquationem algebraïcam inter x & y inveniri poſſe. Reliquis caſibus Curva hoc modo deſcripta erit tranſcendens. Cap. XXI.

Ceterum hic notandum eſt, ſi ſumatur a negativum, tum Hypocycloidem eſſe prodituram, Circulo mobili intra Circulum immobilem cadente. Vulgo quidem b ſtatuitur Radio a æqualis; ſicque Epicycloides & Hypocycloides proprie ſic dictæ reſultant. Hic igitur inventæ Curvæ latius patent; &, quia æquationes non ſunt difficiliores, hanc conditionem adjicere viſum eſt. Si quadrata xx & yy addantur, erit $xx + yy = (a+c)^2 + b^2 + 2b(a+c).\mathit{cof}.\frac{z}{a}$, cujus æquationis ope eliminatio ipſius z eo facilius expedietur, quoties quidem quantitates a & c fuerint commenſurabiles.

524. Præter caſus, quibus amborum Circulorum radii a & c ſunt inter ſe commenſurabiles, Curvæque fiunt algebraïcæ, notari meretur iſte quo $b = -a - c$; ſeu, quo punctum Curvæ D in Centrum Circuli immobilis O incidit. Sit igitur $b = -a - c$; eritque $xx + yy = 2(a+c)^2(1 - \mathit{cof}.\frac{z}{a})$

 =

LIB. II. $= 4(a+c)^2(cos. \frac{z}{2a})^2$; unde fiet $cos. \frac{z}{2a} = \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{2(a+c)}$. Deinde, cum sit $x = (a+c)(cos. \frac{z}{c} - cos. \frac{(a+c)z}{ac})$ & $y = (a+c)(sin. \frac{z}{c} - sin. \frac{(a+c)z}{ac})$, erit $\frac{x}{y} = - tang. \frac{(2a+c)z}{2ac}$ & $sin. \frac{(2a+c)z}{2ac} = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$; atque $cos. \frac{(2a+c)z}{2ac} = \frac{-y}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Quare, cum sit $\sqrt{(xx+yy)} = 2(a+c) cos. \frac{z}{2a}$, fiet $x = 2(a+c). cos. \frac{z}{2a}. sin. \frac{(2a+c)z}{2ac}$, & $y = -2(a+c). cos. \frac{z}{2a}. cos. \frac{(2a+c)z}{2ac}$. Sit, exempli gratia, $c = 2a$; erit $x = 6a. cos. \frac{z}{2a}. sin. \frac{z}{a}$, & $y = -6a. cos. \frac{z}{2a}. cos. \frac{z}{a}$, & $\sqrt{(xx+yy)} = 6a. cos. \frac{z}{2a}$. Ponamus $cos. \frac{z}{2a} = q$, erit $sin. \frac{z}{2a} = \sqrt{(1-qq)}$, & $sin. \frac{z}{a} = 2q\sqrt{(1-qq)}$, atque $cos. \frac{z}{a} = 2qq - 1$: unde fit $q = \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{6a}$, & $y = -6aq(2qq-1) = (1-2qq)\sqrt{(xx+yy)} = (1 - \frac{xx-yy}{18aa})\sqrt{(xx+yy)}$; seu, $18aay = (18aa - xx - yy)\sqrt{(xx+yy)}$. Ponatur $18aa = ff$; &, sumtis quadratis, habebitur ista æquatio sexti ordinis $(xx+yy)^3 - 2ff(xx+yy)^2 + f^4xx = 0$. Quoniam vero hic nobis est propositum non Curvas algebraïcas sed transcendentes contemplari, his missis ad ejusmodi Curvas progrediamur, quarum constructio simul tam Logarithmos quam Arcus circulares requirat.

TAB. XXVI. Fig. 107. 525. Supra vero jam ejusmodi nacti sumus Curvam ex æquatione $2y = x^{+\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}}$, quam transmutavimus in hanc $y = cos. A. lx$. Hæc vero ulterius abit in $A. cos. y = lx$, & $x = e^{A. cos. y}$. Sumta ergo recta AP pro Axe, in eoque A pro initio Abscissarum, primo patet ultra A in regione

gione Abſciſſarum negativarum Curvæ nullam dari portionem continuam, Axis autem AP a Curva in infinitis punctis D interſecabitur, quorum punctorum ab A diſtantiæ progreſſionem geometricam conſtituent, erit ſcilicet $AD = e^{\frac{\pi}{2}}$; Cap. XXI.

$AD^1 = e^{\frac{3\pi}{2}}$; $AD^2 = e^{\frac{5\pi}{2}}$; $AD^3 = e^{\frac{7\pi}{2}}$; &c., tum vero dabuntur infinitæ interſectiones ad A propius accedentes,

$AD^{-1} = e^{\frac{-\varpi}{2}}$, $AD^{-2} = e^{\frac{-3\pi}{2}}$, $AD^{-3} = e^{\frac{-5\pi}{2}}$ &c. Deinde hæc Curva utrinque ad Axem excurret ad diſtantias $AB = AC = 1$, ibique rectas Axi parallelas tanget in infinitis punctis E & F, quorum diſtantiæ a B & C pariter progreſſionem geometricam conſtituent. Infinitis ergo flexibus Curva ad rectam BC accedet, atque tandem cum ea prorſus confundetur. Singularis ergo hujus Curvæ proprietas in hoc conſiſtit, quod non recta infinita ſed finita BC Curvæ ſit Aſymtota, quo ipſo hujus Curvæ indoles ab algebraïcis maxime diſtinguitur.

526. Ad Curvas tranſcendentes, quarum constructio angulos, vel ſolos vel cum Logarithmis conjunctos, requirit, referri quoque debent innumerabiles SPIRALIUM ſpecies. Tab. XXVI Fig. 108 Reſpiciunt autem Spirales punctum quodpiam fixum C tanquam Centrum, circa quod plerumque infinitis ſpiris circumducuntur. Natura harum Curvarum commodiſſime explicatur per æquationem inter cujuſque Curvæ puncti M a Centro C diſtantiam CM & angulum ACM, quem hæc recta CM cum recta poſitione data CA conſtituit. Sit ergo angulus $ACM = s$; ſeu, ſit s Arcus Circuli radio $= 1$ deſcripti, qui ſit anguli ACM menſura, ac ponatur recta $CM = z$. Quod, ſi nunc detur æquatio quæcunque inter variabiles s & z, Curva reſultabit ſpiralis. Cum enim angulus ACM, præter s, infinitis modis exprimi queat; quoniam anguli $2\varpi + s$, $4\varpi + s$, $6\pi + s$, &c., item $-2\varpi + s$, $-4\pi + s$, &c., eandem poſitionem rectæ CM exhibent, his valoribus loco s

 in

LIB. II. in æquatione ſubſtitutis, diſtantia CM infinitos diverſos obtinebit valores, ideoque recta CM producta Curvam in infinitis punctis ſecabit, niſi ex his valoribus quantitas z fiat imaginaria. Incipiamus ergo a caſu ſimpliciſſimo, quo eſt $y = as$; eruntque pro eadem rectæ CM poſitione valores ipſius y iſti $a(2\pi + s)$, $a(4\pi + s)$, $a(6\pi + s)$ &c., itemque $-a(2\pi - s)$, $-a(4\pi - s)$, $-a(6\pi - s)$, &c. Quin etiam ſi pro s ponatur $\pi + s$, eadem rectæ CM manebit poſitio, præterquam quod valor ipſius z capi debeat negative: hinc ad valores ipſius z aſſignatos, addi oportet hos $-a(\pi + s)$, $-a(3\pi + s)$, $-a(5\pi + s)$, &c.: prætereaque iſtos $a(\pi - s)$; $a(3\pi - s)$; $a(5\pi - s)$, &c. Curvæ ergo hujus forma erit talis, qualis in figura ad marginem allegata repræſentatur; rectam ſcilicet AC in C tangit, hincque duobus ramis, utrinque infinitis gyris Centrum C ambientibus & ſe mutuo in recta BC ad AC normali perpetuo decuſſantibus, in infinitum extenditur; eritque recta BCB ejus Diameter. Vocari autem hæc Curva ab inventore ſolet *Spiralis Archimedea*; atque, ſi ſemel eſt exacte deſcripta, inſervit ad quemvis angulum in quotcunque partes ſecandum, uti ex ejus æquatione $z = as$ ſponte patet.

TAB. XXVII. Fig. 109.

527. Quemadmodum æquatio $z = as$, quæ, ſi z & s eſſent Coordinatæ orthogonales, foret pro Linea recta, præbuit Spiralem Archimedeam; ita ſi aliæ æquationes algebraïcæ inter z & s accipiantur, infinitæ aliæ prodibunt Lineæ ſpirales, ſi quidem æquatio ita ſit comparata, ut ſingulis ipſius s valoribus reſpondeant valores reales ipſius z. Ita, hæc æquatio $z = \frac{a}{s}$, quæ ſimilis eſt æquationi pro Hyperbola ad Aſymtotas relata, præbet ſpiralem, quæ a Cel. *Johanne* BERNOULLIO vocata eſt Spiralis Hyperbolica; atque, poſtquam ex Centro C infinitis gyris exiiſſet, tandem in diſtantia infinita ad rectam AA tanquam Aſymtotam accedit. Quod ſi proponatur æquatio $z = a\sqrt{s}$; angulis s negative ſumtis nulla reſpondebit diſtantia realis z; valoribus autem affirmativis ſingulis

gulis ipsius s gemini valores ipsius z respondebunt, alter affirmativus alter negativus: spiræ tamen circa C absolventur infinitæ. Sin autem æquatio inter z & s fuerit hujusmodi $z = a\sqrt{(nn - ss)}$, variabilis z nullum habebit valorem realem nisi s contineatur intra hos limites $+n$ & $-n$; ideoque hoc casu Curva erit finita. Scilicet, si ad Axem ACB per Centrum C utrinque inclinentur rectæ EF, EF, cum Axe angulum $= n$ constituentes, hæ erunt Curvæ sese in C decussantis tangentes, ipsaque Curva habebit Lemniscatæ formam $ACBCA$. Simili autem modo innumerabiles aliæ obtinebuntur Linearum transcendentium formæ, quas evolvere nimis foret prolixum. Cap. XXI. Tab. XXVII. Fig. 110.

528. Hæc tractatio porro in immensum amplificari posset, si inter z & s non æquationes algebraïcæ sed adeo transcendentes accipiantur. Ex quo genere præ reliquis notari meretur ea Linea curva, quæ hac æquatione $s = n\, l.\, \frac{z}{a}$ exprimitur; in qua scilicet anguli s sunt Logarithmis distantiarum z proportionales; ob quam causam hæc Curva *Spiralis Logarithmica* appellatur, atque ob plurimas insignes proprietates maxime est nota. Hujus Curvæ primaria proprietas est, quod omnes rectæ ex Centro C eductæ Curvam sub æqualibus angulis intersecent. Ad eam ex æquatione educendam, sit angulus $ACM = s$, & recta $CM = z$, eritque $s = n\, l.\, \frac{z}{a}$ & $z = ae^{\frac{s}{n}}$; tum capiatur angulus major $ACN = s + v$, erit recta $CN = ae^{\frac{s}{n}}e^{\frac{v}{n}}$, ideoque Centro C descripto Arcu ML, qui erit $= zv$, fiet $LN = ae^{\frac{s}{n}}(e^{\frac{v}{n}} - 1) = ae^{\frac{s}{n}}(\frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + \frac{v^3}{6n^3} + \&c.)$. Hinc erit, $\frac{ML}{LN} =$ Tab. XXVII. Fig. 111.

v

LIB. II. $\frac{v}{\frac{v}{n}+\frac{v^2}{2n^2}+\frac{v^3}{6n^3}+\&c.} = \frac{n}{1+\frac{v}{2n}+\frac{v^2}{6nn}+\&c.}$. At evanescente angulorum differentia $MCN = v$, fiet $\frac{ML}{LN}$ tangens anguli, quem Radius CM cum Curva constituit; unde, facto $v = 0$, istius anguli AMC tangens erit $= n$, ideoque iste angulus constans. Si fuerit $n = 1$, iste angulus erit semirectus, hocque casu Spiralis logarithmica vocatur semirectangula.

CAPUT XXII.

Solutio nonnullorum problematum ad Circulum pertinentium.

529. POsito Radio Circuli $= 1$, supra vidimus fore semicircumferentiam π, seu Arcum 180 graduum, $= 3,14159265358979323846264338$, cujus numeri Logarithmus decimalis seu vulgaris est $0,49714987269413385435126828 8$; qui si multiplicetur per 2, 30258 &c, prodibit ejusdem numeri Logarithmus hyperbolicus, qui erit $= 1,14472988584940017414342 37$. Cum igitur longitudo Arcus 180 graduum sit cognita, inde cujusvis Arcus in gradibus dati longitudo poterit assignari. Propositus sit Arcus n graduum, cujus longitudo, quæ quæritur, sit $= z$; erit $180 : n = \pi : z$, ideoque $z = \frac{\pi n}{180}$: hinc Logarithmus ipsius z reperitur, si a Logarithmo numeri n subtrahatur iste Logarithmus $1,75812263240917221545252641 3$. Quod si autem Arcus propositus detur in minutis primis, ut sit n'; tum a Logarithmo ipsius n subtrahi debebit iste Logarithmus $3,53627388279281584796129321 1$. Sin autem Arcus propositus

positus detur in minutis secundis ut sit $= n''$, tum longitudinis istius Arcus Logarithmus reperietur, si a Logarithmo numeri n subtrahatur iste Logarithmus 5,3144251331764594804700600009, vel, si ad Logarithmum numeri n addatur 4,6855748668235405195299399990, & a characteristica summæ 10 subtrahantur. Cap. XXII.

530. Ex his ergo vicissim Radius & ejus partes quæcunque, cujusmodi sunt Sinus, Tangentes, & Secantes in Arcus converti, hique Arcus more solito secundum gradus, minuta & secunda exprimi possunt. Sit z hujusmodi Linea per Radium 1 ejusque partes decimales expressa; sumatur ejus Logarithmus, ejusque characteristica denario augeatur, quemadmodum in tabulis Logarithmi Sinuum, Tangentium & Secantium repræsentari solent; quo facto vel subtrahatur ab isto Logarithmo 4,6855748668235405195299399990, vel ad eundem Logarithmum addatur 5,3144251331764594804700600009; utroque casu prodibit Logarithmus, cujus numerus respondens præbebit Arcum in minutis secundis expressum. Posteriori quidem casu characteristica denario minui debet. Quod si autem quæratur Arcus ipsi radio æqualis; hic sine Logarithmis facilius per regulam auream invenitur, cum sit π ad 180° ut 1 ad Arcum radio æqualem; hinc autem reperitur iste Arcus in gradibus expressus 57°, 2957795130823208768, idem vero Arcus in minutis primis expressus erit 3437', 74677078493925260788; in minutis vero secundis erit idem Arcus = 206264'', 8062470963551564728. Consueto autem more hic Arcus expressus continebit

$$57^\circ, 17', 44'', 48''', 22'''', 29''''', 21'''''',$$

Hujus Arcus per series in Sectione superiori exhibitas reperitur

Sinus = 0, 84147098480514

&

Cosinus = 0, 5403023058434l

quorum numerorum ille per hunc divisus dabit Tangentem anguli 57°, 17', 44'', 48''', 22'''', 29''''', 21'''''', &c.

LIB. II. 531. His igitur præmissis, quibus Arcus circulares cum Sinibus & Tangentibus comparari possunt, plurimas quæstiones ad naturam Circuli spectantes resolvere poterimus. Ac primo quidem, patet omnem Arcum Sinu suo esse majorem, nisi sit evanescens; aliter autem ratio Cosinuum est comparata, quoniam anguli evanescentis Cosinus est $= 1$, ideoque Arcu major, anguli vero recti Cosinus est $= 0$, ideoque Arcu est minor: ex quo patet intra limites $0°$ & $90°$ dari Arcum, qui sit suo Cosinui æqualis, quem sequente problemate investigemus.

PROBLEMA I.

Invenire Arcum Circuli, qui sit suo Cosinui æqualis.

SOLUTIO.

Sit s iste Arcus quæsitus; eritque $s = cos. s$; ex qua æquatione valor ipsius s commodius quam per regulam *falsi* dictam vix inveniri poterit. Ad hoc autem jam propemodum valorem ipsius s nosse oportet, quod vel levi conjectura assequi licet: nisi autem hoc pateat, tres pluresve valores loco s substituantur, & Cosinus pariter ad eandem unitatem revocetur. Ponamus $s = 30°$, quem Arcum ad partes radii revocemus regula supra data

$$\begin{array}{rl} l.\,30 = & 1,4771213 \\ \text{subtrahe} & \underline{1,7581226} \\ l.\,Arc.\,30° & 9,7189987 \\ & \text{at est} \\ l.\,cos.\,30 = & 9,9375306 \end{array}$$

unde patet Cosinum $30°$ multo esse majorem Arcu ideoque Arcum quæsitum majorem esse $30°$, Fingamus ergo

$s =$

CAP. XXII.

$$s = 40^\circ$$

eritque

$$\begin{array}{rcl} l.40 & = & 1,6020600 \\ \text{ſubtrahe} & & \underline{1,7581226} \\ l.\,Arc.\ 40^\circ & = & 9,8439374 \\ & & \text{at eſt} \\ l.\,coſ.\,40 & = & 9,8842540 \end{array}$$

hinc intelligitur Arcum quæſitum aliquanto majorem eſſe quam 40°, hancque ob rem fingamus $s = 45^\circ$, erit

$$\begin{array}{rcl} l.45 & = & 1,6532125 \\ \text{ſubtrahe} & & \underline{1,7581226} \\ l.\,Arc.\,45^\circ & = & 9,8950899 \\ & & \text{at eſt} \\ l.\,coſ.\,45^\circ & = & 9,8494850 \end{array}$$

continetur ergo angulus quæſitus inter 40°, & 45°: atque adeo hinc proxime definiri poterit. Nam, poſito $s = 40^\circ$,

$$\begin{array}{rl} \text{eſt error} = & +\ 403166: \\ \text{poſito autem } s = 45^\circ, & \\ \text{eſt error} = & -\ \underline{456049}, \\ \&\ \text{differentia} = & 859215, \end{array}$$

Fiat ergo ut 859215 ad 403166 ita differentia hypotheſium 5° ad exceſſum Arcus quæſiti ſupra 40°, unde Arcus quæſitus major fit quam 42°, limites enim illi nimis ſunt remoti, quam ut exactius definire queamus. Sumamus ergo limites propiores

LIB. II.

	$s = 42°$	$s = 43°$
$l.s =$	1,6232493	1,6334685
ſubtrahe	1,7581226	1,7581226
$l.s =$	9,8651267	9,8753459
	& eſt	& eſt
$l.\,Coſ.s =$	9,8710735	9,8641275
	+ 59468	− 112184
	112184	
	171652 : 59468 = 1° : 20′, 47″.	

Arctiſſimos ergo obtinuimus limites 42°, 20′, & 42°, 21 intra quos verus ipſius s valor contineatur. Hos angulos ad minuta prima revocemus

	$s = 2540'$	$s = 2541'$
$l.s =$	3,4048337	3,4050047
ſubtrahe	3,5362739	3,5362739
$l.s =$	9,8685598	9,8687308
$l.\,coſ.s =$	9,8687851	9,8686700
	+ 2253	− 608
	608	
	2861 : 2253 = 1′ : 47″, 14‴	

Hinc concludimus Arcum quæſitum, qui ſuo Coſinui ſit æqualis, fore = 42°, 20′, 47″, 14‴, hujuſque Coſinus, ſeu ipſa longitudo, erit = 0,7390847. Q. E. I.

TAB. XXVIII Fig. 112. 532. Sector Circuli ACB a Chorda AB in duas partes ſecatur, Segmentum AEB & triangulum ACB, quorum illud hoc minus eſt ſi angulus ACB fuerit exiguus, majus autem ſi angulus ACB ſit admodum obtuſus. Dabitur ergo caſus, quo Sector ACB per Chordam AB in duas partes æquales ſecatur, unde naſcitur.

PROBLEMA II.

Invenire Sectorem Circuli ACB, *qui a Chorda* AB *in duas partes æquales ſecetur, ita ut Triangulum* ACB *æquale ſit Segmento* AEB.

SOLUTIO

SOLUTIO.

Poſito Radio $AC = 1$, ſit Arcus quæſitus $AEB = 2s$, ut ſit ejus ſemiſſis $AE = BE = s$: ducto ergo Radio CE, erit $AF = \textit{ſin.}\, s$, & $CF = \textit{coſ.}\, s$: Unde fit Triangulum $ACB = \textit{ſin.}\, s.\, \textit{coſ.}\, s = \frac{1}{2}.\, \textit{ſin.}\, 2s$; & ipſe Sector ACB eſt $= s$, qui cum æquari debeat duplo Triangulo, erit $s = \textit{ſin.}\, 2s$; ideoque Arcus quæri debet, qui æqualis ſit Sinui Arcus dupli. Primum quidem patet angulum ACB recto eſſe majorem; ideoque s ſuperare 45°, unde ſequentes faciamus hypotheſes

	$s = 50°$	$s = 55°$	$s = 54°$
$l.s =$	1, 6989700	1, 7403627	1, 7323938
ſubtrahe	1, 7581226	1. 7581226	1, 7581226
	9, 9408474	9, 9822401	9, 9742712
$l.\textit{ſin}.2s =$	9, 9933515	9, 9729858	9. 9782063
	+ 525041	— 92543	+ 39351
	92543		

617584 : 525041 = 5° : 4°, 15′

Erit ergo propemodum $s = 54°, 15'$: unde ad ſuperiores hypotheſes addamus $s = 54°$, & ex erroribus concludetur $s = 54°, 17', 54''$, qui valor a vero minuto integro non diſcrepat: faciamus ergo ſequentes poſitiones minuto tantum diſcrepantes

	$s = 54°, 17'$	$s = 54°, 18'$	$s = 54°, 19'$
	ſeu	ſeu	ſeu
	$s = 3257'$	$s = 3258'$	$s = 3259'$
	&	&	&
	$2s = 108°, 34'$	$2s = 108°, 36'$	$2s = 108°, 38'$
	compl = 71°, 26′	*compl.* = 71°, 24′	*compl.* = 71°, 22′
$l.s =$	3, 5128178	3, 5129511	3, 5130844
ſubtrahe	3, 5362739	3, 5362739	3, 5362739
$l.s =$	9, 9765439	9, 9766772	9, 9768105
$l.\textit{ſin}.2s =$	9, 9767872	9, 9767022	9, 9766171
	+ 2433	+ 250	— 1934
		1934	
		2184	

fiat ergo 2184 : 250 = 1′ : 6″, 52‴

Lib. II. Hinc erit $s = 54^\circ, 18', 6'', 52'''$. Si hunc angulum accuratius determinare velimus, majoribus tabulis uti oportet; unde faciamus ſequentes hypotheſes $10''$ differentes

$s = 54^\circ, 18', 0''$	$s = 54^\circ, 18', 10''$
ſeu	ſeu
$s = 195480''$	$s = 195490''$
$2s = 108^\circ, 36', 0''$	$2s = 108^\circ, 36', 20''$
$compl. = 71^\circ, 24', 0''$	$compl. = 71^\circ, 23', 40''$
$l.s = 5,2911023304$	$5, 2911245466$
ſubtrahe $5,3144251332$	$5, 3144251332$
$9,9766771972$	$9, 9766994134$
$l.ſin.2s = 9,9767022291$	$9, 9766880552$
$+ \quad 250319$	$- \quad 113582$
113582	

$$363901 : 250319 = 10'' : 6'', 52''', 43'''', 33'''''.$$

$$\text{Erit ergo } s = 54^\circ, 18', 6'', 52''', 43'''', 33''''';$$
ideoque angulus $ACB = 108^\circ, 36', 13'', 45''', 27'''', 6'''''$,
ejuſque complementum $= 71, 23, 46, 14, 32, 54,$
cujus ſinus Logarithmus, ſeu
$$l.ſin.\ 2s = 9,9766924791,$$
& ipſe
$$\text{ſinus} = 0,9477470.$$
Deinde erit
$$ſin.\ s = AF = BF = 0,8121029,$$
ideoque ejus duplum, ſeu
$$\text{Chorda } AB = 1,6242058.$$
Præterea vero erit
$$\text{Coſinus } CF = 0,5335143.$$
Sicque vero proxime Sector quæſitus conſtrui poterit. Q. E. I.

533. Simili modo determinari poteſt Sinus, quo Circuli quadrans in duas partes æquales ſecatur.

PROBLEMA III.

Tab. XXVIII Fig. 113. *In quadrante Circuli* ACB *applicare Sinum* DE *qui Aream quadrantis in duas partes æquales biſecet.*

SOLUTIO

Cap. XXII.

SOLUTIO.

Sit Arcus $AE = s$; erit $BE = \frac{\varpi}{2} - s$, ob $AEB = \frac{\pi}{2}$; & Area quadrantis $= \frac{1}{4}\pi$. Jam Area Sectoris ACE est $= \frac{1}{2}s$, a qua Triangulum $CDE = \frac{1}{2}.\mathit{fin}.s.\mathit{cof}.s$ subtractum relinquet spatium $ADE = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}.\mathit{fin}.s.\mathit{cof}.s$, cujus duplum dare debet quadrantem: ex quo erit $\frac{1}{4}\pi = s - \frac{1}{2}.\mathit{fin}.2s$: ergo $s - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}.\mathit{fin}.2s$. Ponatur Arcus $s - \frac{1}{4}\varpi = s - 45° = u$: erit $2s = 90 + 2u$; ideoque esse oportet $u = \frac{1}{2}.\mathit{cof}.2u$, & $2u = \mathit{cof}.2u$. Cum ergo Arcus requiratur, qui suo Cosinui æquetur, cumque problemate primo invenerimus, erit $2u = 42°, 20', 47'', 14'''$, & $u = 21°, 10', 23'', 37'''$. Quocirca erit Arcus $AE = s = 66°, 10', 23'', 37'''$, & Arcus $BE = 23°, 49', 36'', 23'''$. Hinc erit Radii pars $CD = 0\ 4039718$, & $AD = 0{,}5960281$, atque Sinus $DE = 0{,}9147711$. Hoc ergo modo, quo Circuli quadrans bisecatur, totus Circulus secabitur in 8 partes æquales. Q. E. F.

534. Quemadmodum Circulum omnis recta per Centrum ducta bifariam secat, ita ex quovis Peripheriæ puncto rectæ educi poterunt, quæ Circulum in tres pluresve partes æquales secent. Inquiramus in quadrisectionem, ac resolvamus.

PROBLEMA IV.

Proposito semicirculo AEDB *ex puncto* A *educere Chordam* AD *quæ Aream semicirculi in duas partes æquales secet.* Tab. XXVIII Fig. 114.

SOLUTIO.

Sit Arcus quæsitus $AD = s$; ductoque Radio CD, erit area

LIB. II. area Sectoris $ACD = \frac{1}{2} s$, a qua auferatur Triangulum $ACD = \frac{1}{2} AC.DE = \frac{1}{2}.fin.s$, remanebitque Segmentum $AD = \frac{1}{2} s - \frac{1}{2}.fin.s$, quod æquale esse debet semissi semicirculi ADB, at area semicirculi est $= \frac{1}{2}\pi$: unde erit $s - fin.s = \frac{1}{2}\pi = 90°$, ideoque $s - 90° = fin.s$. Ponatur $s - 90° = u$; erit $fin.s = cos.u$, & hanc ob rem $u = cos.u$. Per Problema ergo primum erit $u = 42°, 20', 47'', 14'''$; hincque $s =$ angulo $ACD = 132°, 20', 47'', 14'''$, & angulus $BCD = 47°, 39', 12'', 46'''$. Ipsa vero Corda AD erit $= 1,8295422$. Q. E. F.

535. Sic igitur in Circulo Segmentum abscinditur cujus area sit totius Circuli pars quarta, Segmentum autem semissi Circuli æquale est ipse semicirculus ejusque Corda Diameter. Simili modo Segmentum inveniri potest, quod sit triens totius Circuli, quod sequenti Problemate investigemus.

PROBLEMA V.

TAB. XXIX. *Fig.* 115. *Ex puncto Peripheriæ* A *educere duas Cordas* AB, AC, *quibus area Circuli in tres partes æquales dividatur.*

SOLUTIO.

Posito Circuli Radio $= 1$, & hemiperipheria $= \pi$, sit Arcus AB vel $AC = s$; eritque area Segmenti AEB vel $AFC = \frac{1}{2} s - \frac{1}{2}.fin.s$: at area Circuli est $= \pi$; unde, cum Segmenti AEB area debeat esse triens Circuli, fiet $\frac{1}{2} s - \frac{1}{2}.fin.s = \frac{\pi}{3} = 60°$; seu, $s - fin.s = 120°$, ideoque $s - 120° = fin.s$. Sit $s - 120° = u$, erit $u = fin.(u + 120) = fin.(60 - u)$.

Arcus

Arcus ergo u quæri debet, qui sit æqualis sinui anguli $60° - u$. Erit ergo u minor quam $60°$; ad quem Arcum inveniendum faciamus sequentes positiones CAP. XXII.

	$u = 20°$	$u = 30°$	$u = 40°$
	$60 - u = 40°$	$60 - u = 30°$	$60 - u = 20°$
$l.\, u =$	1,3010300	1,4771213	1,6020600
subtrahe	1,7581226	1,7581226	1,7581226
$l.\, u =$	9,5429074	9,7189987	9,8439374
$l. fin. (60 - u) =$	9,8080675	9,6989700	9,5340517
	+ 2651601	— 200287	— 3098857

Patet ergo angulum u aliquanto esse minorem quam $30°$, &, calculo subducto, major esse debet quam $29°$ sit ergo $u = 29°$

$$
\begin{array}{rl}
60 - u = & 31° \\
l.\, u = & 1,4623980 \\
\text{fubtrahe} & \underline{1,7581226} \\
l.\, u = & 9,7042754 \\
l. fin. (60 - u) = & \underline{9,7118393} \\
+ & 75639 \\
- & \underline{200287} \\
 & 275926 : 75639 = 1° : 16', 26''.
\end{array}
$$

Foret ergo angulus $u = 29°, 16', 26''$, ad quem accuratius inveniendum, faciamus has hypotheses uno tantum minuto differentes

	$u = 29°, 16'$	$u = 29°, 17'$
	seu	seu
	$u = 1756'$	$u = 1757'$
	$60 - u = 30°, 44'$	$60 - u = 30°, 43'$
$l.\, u =$	3, 2445245	3, 2447718
subtrahe	3, 5362739	3, 5362739
$l.\, u =$	9, 7082506	9, 7084979
$l. fin. (60 - u) =$	9, 7084575	9, 7082450
	+ 2069	— 2529

$$
\begin{array}{l}
\; 2529 \\
\underline{} \\
4598 : 2069 = 1' : 27'', 0'''.
\end{array}
$$

Erit ergo vere $u = 29°, 16', 27'', 0'''$, hincque

LIB. II. Arcus $s = AEB = 149°, 16', 27'', 0''' = AFC$;

unde resultat

Arcus $BC = 61°, 27', 6'', 0'''$,

ipsa vero

Chorda $AB = AC = 19285340$. Q. E. F.

536. His Problematis, quibus Arcus quispiam quæritur dato Sinui vel Cosinui æqualis, adjungamus sequens, quo quidem idem negotium proponitur, attamen major difficultas occurrit.

PROBLEMA VI.

TAB. XXIX. Fig. 116. *In semicirculo* AEB *Arcum* AE *abscindere, ita ut, ducto ejus Sinu* ED, *Arcus* AE *sit æqualis summæ rectarum* AD + DE.

SOLUTIO.

Quoniam statim patet hunc Arcum quadrante esse majorem, quæramus ejus Complementum BE, & vocemus Arcum $BE = s$, ita ut sit Arcus $AE = 180° - s$, atque ob $AC = 1$, $CD = cos.s$, $DE = sin.s$, erit $180° - s = 1 + cos.s + sin.s$. At, est $sin.\, s = 2\, sin.\frac{1}{2}s.\, cos.\frac{1}{2}s$, & $1 + cos.s = 2\, cos.\frac{1}{2}s.\, cos.\frac{1}{2}s$; unde fit $180° - s = 2\, cos.\frac{1}{2}s\,(sin.\frac{1}{2}s + cos.\frac{1}{2}s)$. At, est $cos.(45° - \frac{1}{2}s) = \frac{1}{\sqrt{2}}.\, cos.\frac{1}{2}s + \frac{1}{\sqrt{2}}.\, sin.\frac{1}{2}s$: ergo $sin.\frac{1}{2}s + cos.\frac{1}{2}s = \sqrt{2}.\, cos.(45° - \frac{1}{2}s)$: unde erit $180° - s = 2\sqrt{2}.\, cos.\frac{1}{2}s \times cos.(45° - \frac{1}{2}s)$. Hac facta reductione, faciamus sequentes positiones

$\frac{1}{2}s =$

CAP. XXII.

$\frac{1}{2}s =$	20°	21°
$45^\circ - \frac{1}{2}s =$	25°	24°
$180 - s =$	140°	138°
$l.(180 - s) =$	$2,1461280$	$2,1398791$
ſubtrahe	$1,7581226$	$1,7581226$
$l.(180 - s) =$	$0,3880054$	$0,3817565$
$l.cof.\frac{1}{2}s =$	$9,9729858$	$9,9701517$
$l.cof.(45^\circ - \frac{1}{2})s =$	$9,9572757$	$9,9607302$
$l\,2\sqrt{2} =$	$0,4515450$	$0,4515450$
	$0,3818065$	$0,3824269$
Error	$+\ 61989$	$-\ 6704$
	6704	

$$68693 : 61989 = 1^\circ : 54'$$

Hinc continetur $\frac{1}{2}s$ intra limites $20^\circ, 54'$, & $20^\circ, 55'$, ideoque ſequentes hypotheſes fiant

$\frac{1}{2}s =$	$20^\circ, 54'$	$20^\circ, 55'$
$45^\circ - \frac{1}{2}s =$	$24^\circ, 6'$	$24^\circ, 5'$
$s =$	$41^\circ, 48'$	$41^\circ, 50'$
$180 - s =$	$138^\circ, 12'$	$138^\circ, 10'$
	ſeu	ſeu
$180 - s =$	$8292'$	$8290'$
$l.(180 - s) =$	$3,9186593$	$3,9185545$
ſubtrahe	$3,5362739$	$3,5362739$
	$0,3823854$	$0,3822806$
$l.cof.\frac{1}{2}s =$	$9,9704419$	$9,9703937$
$l.cof.(45 - \frac{1}{2}s) =$	$9,9603919$	$9,9604484$
$l.2\sqrt{2} =$	$0,4515450$	$0,4515450$
	$0,3823788$	$0,3823871$
Error	$+\ 66$	$-\ 1065$
	1065	

$$1131 : 66 = 1' : 3'', 30'''.$$

 Hanc

LIB. II. Hanc ob rem erit $\frac{1}{2} s = 20°, 54', 3'', 30'''$,

inde

$$s = 41°, 48', 7'', 0''' = BE$$

ideoque Arcus quæsitus

$$AE = 138°, 11', 53'', 0'''.$$

Erit vero Linea

$DE = 0,6665578$, & $AD = 1,7454535$. *Q. E. F.*

537. Comparemus nunc Arcus cum suis Tangentibus; &, cum in primo quadrante Tangentes sint Arcubus minores, quæramus Arcum, qui suæ Tangentis semissi sit æqualis, quo solvetur

PROBLEMA VII.

TAB. XXIX. Fig. 117. *Abscindere Sectorem* ACD, *qui sit semissis Trianguli* ACE *a Radio* AC, *Tangente* AE *&* *Secante* CE *comprehensi.*

SOLUTIO.

Posito Arcu $AD = s$, erit Sector $ACD = \frac{1}{2} s$, Triangulum vero $ACE = \frac{1}{2}.\, tang.\, s$: unde debet esse $\frac{1}{2}.\, tang.\, s = s$, seu $2s = tang.s$. Faciamus ergo has hypotheses

	$s = 60°$	$s = 70°$	$s = 66°$	$s = 67°$
$l.\, 2s =$	2,0791812	2,1461280	2,1205739	2,1271048
	1,7581226	1,7581226	1,7581226	1,7581226
$l.\, 2s =$	0,3210586	0,3880054	0,3624513	0,3689822
$l.\, tang.\, s =$	0,2385606	0,4389341	0,3514169	0,3721481
	+ 824980	− 509287	+ 110344	− 31659

Hinc ipsius s reperiuntur limites arctiores $66°, 46'$, & $66°, 47'$: quare fiat

$s =$

CAP. XXII.

	$s = 66°, 46'$	$s = 66°, 47'$
	ſeu	ſeu
	$s = 4006'$	$s = 4007'$
	$2s = 8012'$	$2s = 8014'$
$l.\,2s =$	$3,9037409$	$3,9038493$
	$3,5362739$	$3,5362739$
$l.\,2s =$	$0,3674670$	$0,3675754$
$l.tang.\,s =$	$0,3672499$	$0,3675985$
Error	$+\ 2171$	$-\ 231$
	231	

$$2402 : 2171 = 1' : 54'', 14'''.$$

unde erit

Arcus $s = AD = 66°, 46', 54'', 14'''$,

hincque

Tangens $AE = 2,3311220$. *Q. E. F.*

538. Proponatur nunc ſequens.

PROBLEMA VIII.

Propoſito Circuli quadrante ACB *invenire Arcum* AE, *qui æqualis ſit Chordæ ſuæ* AE *ad occurſum* F *uſque productæ.* TAB. XXIX. *Fig.* 118.

SOLUTIO.

Sit Arcus $AE = s$, erit ejus Chorda $AE = 2.\mathit{ſin.}\frac{1}{2}s$, ſinus verſus $AD = 1 - \mathit{coſ.}s = 2.\mathit{ſin.}\frac{1}{2}s.\mathit{ſin.}\frac{1}{2}s$: unde Triangula ſimilia ADE, ACF, dabunt $2.\mathit{ſin.}\frac{1}{2}s.\mathit{ſin.}\frac{1}{2}s : 2\,\mathit{ſin.}\frac{1}{2}s = 1 : s$, eritque ergo $s.\mathit{ſin.}\frac{1}{2}s = 1$. Fiant ergo ſequentes poſitiones

	$s = 70°$	$s = 80°$	$s = 84°$	$s = 85°$
$l.s =$	1,8450980	1,9030900	1,9242793	1,9294189
subtrahe	1,7581226	1,7581226	1,7581226	1,7581226
	0,0869754	0,1449674	0,1661567	0,1712963
$l.\mathit{fin.}\ \frac{1}{2}s =$	9,7585913	9,8080675	9,8255109	9,8296833
	9,8455667	9,9530349	9,9916676	0,0009796
Error	$+$ 0,1544332	0,0469650	$+$ 83223	$-$ 9796

Unde s continetur intra limites $84°, 53'$ & $84°, 54'$

Sit ergo

	$s = 84°, 53'$ seu	$s = 84°, 54'$ seu
	$s = 5093'$	$s = 5094'$
	$\frac{1}{2}s = 42°, 26\frac{1}{2}'$	$\frac{1}{2}s = 42°, 27'$
$l.s =$	3, 7069737	3, 7070589
subtrahe	3, 5362739	3, 5362739
	0, 1706998	0, 1707850
$l.\mathit{fin.}\ \frac{1}{2}s =$	9, 8292003	9, 8292694
	0, 9999001	0, 0000544
Error	$+$ 998	$-$ 544

Hincque oritur

Arcus $s = AE = 84°, 53', 38'', 51'''$,

&

Arcus $BE = 50°, 6', 21'', 9'''$. *Q. E. I.*

539. Quanquam in primo quadrante omnes Arcus sunt suis Tangentibus minores, tamen in sequentibus quadrantibus dantur ejusmodi Arcus qui sint æquales suis Tangentibus, quos in sequenti Problemate methodo ex seriebus petita investigemus.

PROBLEMA IX.

Invenire omnes Arcus, qui Tangentibus suis sint æquales.

SOLUTIO.

Primus Arcus hac proprietate præditus est infinite parvus.

Tum

Tum in secundo quadrante, quia hic Tangentes sunt negativæ, datur nullus istiusmodi Arcus; in tertio vero quadrante dabitur unus 270° aliquanto minor; porro dabuntur ejusmodi Arcus in quinto, septimo, &c. Ponatur quarta Peripheriæ pars $= q$, & Arcus quæsiti contineantur in hac forma $(2n+1)q - s$, ita ut sit $(2n+1)q - s = cot.s = \frac{1}{tang.s}$. Sit $tang.s = x$; erit $s = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \&c.$, ideoque $(2n+1)q = \frac{1}{x} + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \&c.$ Patet autem, ob s Arcum eo minorem, quo major fuerit numerus n, fore x quantitatem valde parvam ideoque proxime $x = \frac{1}{(2n+1)q}$; seu $\frac{1}{x} = (2n+1)q$; propius autem invenitur $\frac{1}{x} = (2n+1)q - s = (2n+1)q - \frac{1}{(2n+1)q} - \frac{2}{3(2n+1)^3q^3} - \frac{13}{15(2n+1)^5q^5} - \frac{146}{105(2n+1)^7q^7} - \frac{2343}{945(2n+1)^9q^9} - \&c.$ Cum ergo sit $q = \frac{\varpi}{2} = 1,5707963267948$, erit Arcus quæsitus $= (2n+1)\,1,57079632679 - \frac{1}{2n+1}\,0,63661977 - \frac{0,17200817}{(2n+1)^3} - \frac{0,09062596}{(2n+1)^5} - \frac{0,05892834}{(2n+1)^7} - \frac{0,04258543}{(2n+1)^9} -$ &c. Vel si isti termini, qui in partibus Radii exprimuntur, ad mensuram Arcuum reducantur, erit Arcus quæsitus in genere consideratus $= (2n+1)90° - \frac{131313''}{2n+1} - \frac{35479''}{(2n+1)^3} - \frac{18692''}{(2n+1)^5} - \frac{12155''}{(2n+1)^7} - \frac{8784''}{(2n+1)^9}$. Arcus ergo quæstioni satisfacientes ordine sunt.

CAP. XXII.

I.	$1 \cdot 90^\circ$	—	90°
II.	$3 \cdot 90^\circ$	—	$12^\circ, 32', 48''$
III.	$5 \cdot 90^\circ$	—	$7, 22, 32$
IV.	$7 \cdot 90^\circ$	—	$5, 14, 22$
V.	$9 \cdot 90^\circ$	—	$4, 3, 59$
VI.	$11 \cdot 90^\circ$	—	$3, 19, 24$
VII.	$13 \cdot 90^\circ$	—	$2, 48, 37$
VIII.	$15 \cdot 90^\circ$	—	$2, 26, 5$
IX.	$17 \cdot 90^\circ$	—	$2, 8, 51$
X.	$19 \cdot 90^\circ$	—	$1, 55, 16$

540. Hujusmodi quæstiones plures non propono, cum methodus eas resolvendi ex his exemplis clare perspiciatur. Ceterum hæc Problemata in hunc finem potissimum sunt excogitata, ut Circuli natura, cujus quadratura omnibus methodis adhuc usitatis frustra fuit tentata, penitius inspiciatur. Si enim accidisset, ut in solutione cujuspiam Problematis, vel Arcus cum tota Circumferentia commensurabilis, vel ejus Sinus Tangensve per Radium construibilis prodiisset, tum utique species quædam quadraturæ Circuli haberetur. Scilicet, si in solutione Problematis VI. Sinus DE, qui prodit $= 0,6665578$, inventus fuisset $= 0,6666666 = \frac{2}{3}$, elegans certe Circuli proprietas innotesceret, Arcus quippe AE construi posset Lineæ rectæ $AD + DE = 1 + \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{5}{9}}$ æqualis. Nulla vero etiamnum ratio patet, quæ hujusmodi Circuli quadraturam impossibilem esse evincat: atque, si talis detur, nulla alia via, præter hanc, quam hoc Capite aperuimus, ad eam investigandam magis apta videtur.

TAB. XXIX. *Fig.* 116.

FINIS LIBRI SECUNDI.

APPEN-

APPENDIX
DE
SUPERFICIEBUS.

CAPUT I.

Cap. I.

De Superficiebus Corporum in genere.

1. QUæ in superiori Sectione de Lineis curvis sunt tradita earumque ad æquationes revocandarum ratione, latissime quidem patent, atque ad omnes Lineas curvas, quarum cuncta puncta in eodem plano sint posita, extenduntur. Verum, si tota Linea curva non fuerit in eodem plano sita, tum præcepta supra data non sufficiunt ad proprietates ejusmodi Curvarum eruendas. Hujus generis Curvæ duplicem habent curvaturam; hocque nomine de iis eximium scripsit tractatum Acutissimus Geometra CLAIRAUT. Cum autem hæc materia maxime sit connexa cum natura Superficierum, de qua hac sectione exponere constitui, seorsim eam non pertractabo, sed ejus explicationem cum sequenti de Superficiebus doctrina conjungam.

2. Quemadmodum Lineæ sunt vel rectæ vel curvæ, ita Superficies sunt vel planæ, vel non planæ. Non planas autem voco, quæ vel convexæ sunt vel concavæ, vel utriusque naturæ participes. Sic, Superficies externa Globi, Cylindri, & Coni, exceptis basibus, est convexa; interna autem catini Superficies concava. Quemadmodum porro Linea recta est, cujus terna quæque puncta in directum sunt posita; ita Superficies plana est cujus quaterna quæque puncta in eodem plano sunt posita; ex quo perspicuum est Superficiem non planam, hoc est sive convexam sive concavam, esse cujus non omnia quaterna puncta in eodem plano sunt sita.

3. Superficies igitur non plana qualis sit facillime intelligetur si, quantum a Superficie plana ubique discrepet, cognoverimus. Simili scilicet modo, quo indolem Linearum curvarum ex distantiis, quibus ejus quæque puncta a Linea recta pro Axe assumta distant, colligimus; ita naturam Superficierum

 æstimari

APPEND. æſtimari conveniet ex ſingulorum ejus punctorum diſtantiis a Superficie plana pro lubitu aſſumta. Propoſita ergo quacunque Superficie, cujus indolem definiri oporteat, pro arbitrio eligatur Superficies plana, ad quam ex ſingulis Superficiei propoſitæ punctis perpendicula ducta concipiantur: quo facto, ſi cujuſvis horum perpendiculorum longitudo per æquationem determinari queat, naturam Superficiei hac ipſa æquatione exprimi cenſebimus. Ex tali enim æquatione viciſſim omnia Superficiei puncta aſſignari poterunt, atque ideo ipſa Superficies determinabitur.

TAB. XXX. Fig. 119. 4. Repræſentet planum tabulæ eam Superficiem planam, ad quam ſingula cujuſque Superficiei propoſitæ puncta referamus. Sit M punctum quodcunque Superficiei propoſitæ, quod extra planum tabulæ ſitum concipiatur, unde ad hoc planum perpendicularis demittatur MQ, plano in puncto Q occurrens. Jam, ad ſitum hujus puncti Q calculo exprimendum, aſſumatur in plano tabulæ recta quæpiam AB pro Axe, ad quem ex puncto Q recta normalis ducatur QP. Denique in ipſo Axe AB ſumatur punctum quodvis A pro initio Abſciſſarum: quo facto, ſitus puncti M innoteſcet ſi noverimus longitudines trium iſtarum Linearum AP, PQ & QM; ſicque tribus Coordinatis inter ſe normalibus ſitus cujuſque Superficiei puncti M ſimili modo determinabitur, quo Linearum curvarum in plano ſitarum ſingula puncta per duas Coordinatas inter ſe normales exhiberi ſolent.

5. Cum igitur habeamus tres Coordinatas AP, PQ & QM, ponamus $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; ex hiſque indolem Superficiei propoſitæ intelligemus, ſi, ſumtis pro lubitu binis x & y, noverimus quanta futura ſit tertia z; hoc enim modo omnia Superficiei puncta M determinare poterimus. Natura ergo cujuſvis Superficiei exprimitur æquatione, qua Coordinata z definitur per binas reliquas x & y una cum conſtantibus. Hinc pro quavis Superficie propoſita variabilis z æquabitur Functioni cuidam binarum variabilium x & y. Atque viciſſim, ſi z æqualis fuerit Functioni cuicunque

cunque ipſarum x & y, tum iſta æquatio exhibebit Superficiem quampiam, cujus natura ex ipſa illa æquatione innoteſcet. Subſtituendis enim pro x & y omnibus, quos recipere poſſunt, valoribus, tam affirmativis quam negativis, omnia plani aſſumti puncta Q obtinebuntur: tum vero ex æquatione ipſius z per x & y conſtabit ubique longitudo perpendiculi $QM = z$, donec ad Superficiem pertingat: qui ipſius z valor ſi fuerit affirmativus, punctum Superficiei M ſupra planum APQ, erit ſitum; ſin autem ſit negativus, infra hoc planum cadet; ſi evaneſcat, punctum Superficiei M in hoc ipſo plano reperietur; at, ſi fuerit imaginarius, tum puncto Q nullum prorſus Superficiei punctum M reſpondebit. Quod ſi autem eveniat, ut z habeat plures valores reales, tum recta ad planum normalis per punctum Q ducta Superficiem in pluribus punctis M trajiciet. CAP. I.

6. Quod igitur ad varias Superficierum naturas attinet, hic ſtatim ſe offert diſtinctio in continuas ſeu regulares, & diſcontinuas ſeu irregulares. Superficies ſcilicet continua erit, cujus omnia puncta per eandem æquationem inter z & x & y exprimuntur; ſeu, ubi z eſt eadem Functio ipſarum x & y pro omnibus Superficiei punctis. Superficies autem irregularis eſt cujus variæ partes per diverſas Functiones exhibentur; uti, ſi propoſita fuerit Superficies, quæ in uno loco ſit ſphærica, in alio conica, ſeu cylindrica, ſeu plana. Hic autem Superficies irregulares penitus excludimus, atque ad ſolas regulares, quarum natura una quadam conſtanti æquatione contineatur, reſpiciemus. His enim pertractatis, quoniam Superficies irregulares ex partibus variarum regularium ſunt conflatæ, etiam iſtas facile dijudicare licebit.

7. Superficierum autem regularium primaria diviſio inſtituitur in algebraïcas & tranſcendentes. Superficies autem algebraïca vocatur, cujus natura exprimitur per æquationem algebraïcam inter Coordinatas x, y & z; ſeu, quando z æqualis eſt Functioni algebraïcæ ipſarum x & y. Contra igitur, ſi z non fuerit Functio algebraïca ipſarum x & y; ſeu, ſi in æqua-

 tione

APPEND. tione inter x, y, & z insint quantitates transcendentes, veluti a Logarithmis & Arcubus circularibus pendentes, tum Superficies, cujus natura hujusmodi æquatione exprimitur, erit transcendens. Talis erit Superficies, si fuerit $z = x.l.y$; seu $z = y^x$; seu $z = y.\mathit{fin}.x$. Facile autem intelligitur Superficies algebraïcas ante tractari oportere, quam ad transcendentes progrediamur.

8. Deinde ad naturam Superficiei cognoscendam, imprimis attendendum est, qualis sit Functio z ipsarum x & y, ratione numeri valorum, quos continet. Hic igitur primum occurrunt eæ Superficies, pro quibus z æquatur Functioni uniformi ipsarum x & y. Sit P hujusmodi Functio uniformis, seu rationalis, ipsarum x & y; atque, si fuerit $z = P$, singulis punctis plani Q totidem respondebunt Superficiei puncta; seu, quælibet recta ad planum APQ normalis Superficiem in unico puncto trajiciet. Neque vero hoc casu usquam valor rectæ QM fieri poterit imaginarius; sed omnes istiusmodi rectæ puncta Superficiei realia præbebunt. Interim tamen ista Functionum diversitas non essentialem varietatem inter Superficies producit; pendet enim a situ plani APQ, qui, perinde ac Axis, est arbitrarius; ita ut, si Superficies eadem ad aliud planum referatur, Functio z quæ erat uniformis, evadere possit utcunque multiformis.

9. Sint P & Q Functiones quæcunque uniformes ipsarum x & y; atque, si fuerit $zz - Pz + Q = 0$, tum rectæ per singula plani puncta Q normaliter ductæ Superficiem, vel in duobus punctis secabunt, vel nusquam: habebit enim z duos valores, qui vel ambo erunt reales, vel ambo imaginarii. Simili modo si, denotantibus P, Q & R Functiones uniformes ipsarum x & y, fuerit $z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$; tum erit z Functio triformis, & quælibet recta QM Superficiem secabit vel in tribus punctis, si omnes radices æquationis fuerint reales; vel tantum in unico, si scilicet binæ radices fuerint imaginariæ. Similique modo erit judicandum, si

ſi z definiatur per æquationem, in qua plures obtineat dimenſiones. Quam multiformis igitur futura ſit Functio z facillime cognoſcetur, ſi æquatio inter x & y & z, ad rationalitatem perducatur. CAP. I.

10. De cetero, ſicuti in æquationibus pro Lineis curvis binas Coordinatas inter ſe permutari poſſe vidimus, ita in æquatione quavis pro Superficie tres Coordinatæ x, y, & z inter ſe ſunt permutabiles. Primo enim, ſi in plano APQ altera recta Ap ad AP normalis pro Axe aſſumatur, erit nunc $Ap = y$, & $pQ = x$; ſicque binæ x & y inter ſe ſunt permutatæ. Reliquæ permutationes omnes intelligentur complendo parallelepipedon rectangulum $ApQM\xi\pi qPA$; in quo primum ſpectanda veniunt tria plana fixa inter ſe normalia $APQp$, $APq\pi$, & $Ap\xi\pi$; ad quæ ſingula, quemadmodum referatur Superficies propoſita cujus punctum eſt M, eadem æquatio inter x, y, & z declarat. In unoquoque autem plano duplex datur Axis, uterque initium habens in puncto A, unde ſex diverſæ relationes inter tres Coordinatas reſultant.

Coordinatæ erunt

Pro plano $APQp$

$$\text{vel} \begin{cases} AP = x \\ PQ = y \\ QM = z \end{cases}$$

$$\text{vel} \begin{cases} Ap = y \\ pQ = x \\ QM = z \end{cases}$$

Pro plano $APq\pi$

$$\text{vel} \begin{cases} AP = x \\ Pq = z \\ qM = y \end{cases}$$

$$\text{vel} \begin{cases} A\pi = z \\ \varpi q = x \\ qM = y \end{cases}$$

Pro

APPEND.

Pro plano $Ap\xi\pi$ $\quad$ vel $\begin{cases} Ap = y \\ p\xi = z \\ \xi M = x \end{cases}$ $\quad$ vel $\begin{cases} A\pi = z \\ \pi\xi = y \\ \xi M = x \end{cases}$

Quod ſi autem a puncto fixo A ad punctum Superficiei M ducatur recta AM, erit ea $= \sqrt{(xx + yy + zz)}$.

11. Eadem ergo æquatio inter Coordinatas x, y, & z cognitionem Superficiei ad tria plana exhibet, quæ inter ſe ſunt normalia atque ſe invicem in puncto A decuſſant. Quemadmodum ſcilicet variabilis z diſtantiam cujuſque Superficiei puncti M a plano APQ exhibet, ita variabilis y ejuſdem puncti M diſtantiam a plano APq, & variabilis x a plano $Ap\xi$ præbet. Quod ſi autem noverimus, quantis intervallis punctum M diſtet ab unoquoque horum trium planorum, tum ſimul ejus verus ſitus innoteſcit. Hæc igitur tria plana, ad quæ Superficies quævis per æquationem trium variabilium x, y & z refertur, imprimis notari debent; quorum ſi unum, uti APQ, fuerit horizontale, duo reliqua erunt verticalia, alterum ſcilicet horizontali ſecundum rectam AP alterum ſecundum rectam Ap inſiſtet.

12. Conſtitutis ergo his tribus planis inter ſe normalibus, ad quæ Superficies propoſita referatur, ex ſingulis ejus punctis M ad iſta plana APQ, APq, & $A\pi\xi$ ducantur rectæ normales MQ, Mq, & $M\xi$, quæ erunt $MQ = z$, $Mq = y$, & $M\xi = x$. Deinde, completo parallelepipedo, habebuntur tres rectæ iſtis æquales, quæ ex puncto fixo A egrediantur, ſcilicet $AP = x$, $Ap = y$, & $A\pi = z$, ex quibus cognitis ſitus puncti M determinatur. Manifeſtum autem eſt, ſi iſtæ variabiles x, y, & z, dum in plagas, quas Figura indicat, vergunt, affirmativæ cenſeantur, tum earum valores, ſi in plagas contrarias dirigantur, negativos cenſeri oportere.

13. Si

13. Si in æquatione inter tres variabiles x, y & z, ea quæ ad planum APQ eſt normalis, nempe z, ubique pares habeat dimenſiones, tum geminos habebit valores æquales, alterum affirmativum alterum negativum. Superficies igitur ita erit comparata, ut ad utramque plani APQ partem ſit ſui ſimilis & æqualis, atque adeo Corpus, quod iſta Superficie terminatur, ſectione ſecundum planum APQ facta, in duas partes ſimiles & æquales dividetur. Quemadmodum ergo in Figuris planis ea Linea recta, qua Figura in duas partes ſimiles & æquales dirimebatur, Diameter eſt appellata; ita in ſolidis id planum, quo Corpus in duas partes ſimiles dividitur, *Diametrale* vocemus. Quare, ſi variabilis z in æquatione ubique pares habeat dimenſiones, tum planum APQ, erit diametrale. CAP. I.

14. Simili modo intelligitur, ſi in æquatione pro Superficie variabilis y, quæ ad planum APq eſt normalis, ubique pares habeat dimenſiones, tum planum APq fore diametrale. Sin autem variabilis x pares ubique habeat dimenſiones, tum planum $Ap\xi$ erit diametrale. Ex æquatione ergo pro quavis Superficie inter tres variabiles x, y, & z data ſtatim apparet, utrum ex tribus planis APQ, APq, $Ap\xi$, ſit diametrale an ſecus. Fieri autem poteſt, ut duo, imo omnia tria hæc plana, ſint diametralia. Scilicet, pro Globo, cujus Centrum ſit in A, ob radium $AM = \surd(xx + yy + zz) = a$, erit $xx + yy + zz = aa$, unde ſingulis hiſce tribus planis Globus in duas partes ſimiles & æquales diſpertietur.

15. Ad Figuram Superficiei, quæ in propoſita æquatione continetur, cognoſcendam, ad tria illa plana inter ſe normalia imprimis attendi oportet, quæ in Figura repræſentantur per $QQ^1Q^2Q^3$, & $TT^1T^2T^3$, atque $VV^1V^2V^3$, atque ſe mutuo in puncto A interſecant. Hæc tria plana, ſi in infinitum quaquaverſus producta concipiantur, univerſum ſpatium divident in octo regiones, quæ in Figura exhibentur litteris AX, AX^1, AX^2, AX^3, AX^4, AX^5, AX^6, & AX^7. Quod, ſi jam in prima regione AX variabiles x, y, & z TAB. XXX. *Fig.* 120.

Append. affirmativos valores habere ponantur, in reliquis regionibus una vel duæ vel omnes tres fient negativæ. Ratio autem horum valorum clariſſime ex ſequenti ſchemate perſpicietur

Regio AX	*Regio* AX^1	*Regio* AX^2	*Regio* AX^3
$AP = +x$	$AP^1 = -x$	$AP = +x$	$AP^1 = -x$
$AR = +y$	$AR = +y$	$AR = +y$	$AR = +y$
$AS = +z$	$AS = +z$	$AS^1 = -z$	$AS^1 = -z$
Regio AX^4	*Regio* AX^5	*Regio* AX^6	*Regio* AX^7
$AP = +x$	$AP^1 = -x$	$AP = +x$	$AP^1 = -x$
$AR^1 = -y$	$AR^1 = -y$	$AR^1 = -y$	$AR^1 = -y$
$AS = +z$	$AS = +z$	$AS^1 = -z$	$AS^1 = -z$

Tab. XXXI. Fig. 121. 16. Commodius autem erit octo has diverſas regiones numeris inſignire, quo facilius, de quanam ſermo ſit, indicare queamus. Cum igitur octo iſtæ regiones in puncto A ſint confines, atque interſectione trium planorum inter ſe normalium diſtinguantur; plana autem hæc tribus rectis Pp, Qq, Rr ſeſe in puncto A normaliter decuſſantibus determinentur, regiones illæ tribus litteris P, Q, R, vel majuſculis vel minuſculis definiri poterunt. Regio ſcilicet principalis, ſeu prima, PQR erit ſpatium, quod parallelepipedum ex tribus rectis AP, AQ, AR in infinitum productis formatum complectitur; & regio Pqr erit ſpatium, quod parallelepipedum ex tribus rectis AP, Aq, Ar in infinitum productis formatum includet. Poſitis ergo tribus variabilibus $AP = x$, $AQ = y$, $AR = z$, erit utique $Ap = -x$, $Aq = -y$, & $Ar = -z$. Sequenti ergo modo octo has regiones numeris diſtinguemus, ut ſit

prima I.

	prima I.	ſecunda II.
	PQR	PQr
inter Coordinatas	$AP = +x$	$AP = +x$
	$AQ = +y$	$AQ = +y$
	$AR = +z$	$Ar = -z$
	tertia III.	quarta IV.
	PqR	pQR
inter Coordinatas	$AP = +x$	$Ap = -x$
	$Aq = -y$	$AQ = +y$
	$AR = +z$	$AR = +z$
	quinta V.	ſexta VI.
	Pqr	pQr
inter Coordinatas	$AP = +x$	$Ap = -x$
	$Aq = -y$	$AQ = +y$
	$Ar = -z$	$Ar = -z$
	ſeptima VII.	octava VIII.
	pqR	pqr
inter Coordinatas	$Ap = -x$	$Ap = -x$
	$Aq = -y$	$Aq = -y$
	$AR = +z$	$Ar = -z$

17. Regiones iſtæ vel magis vel minus a ſe invicem diſcrepant. Primo nimirum dantur binæ regiones, quæ duas Coordinatas habent communes, unica diſcrepante; ideoque plano ſe invicem tangunt, quas vocemus *conjunctas*. Deinde, ſi duæ Coordinatæ fuerint diverſæ, unicamque habeant communem, regiones Linea recta tantum ſe tangent, quas vocemus *disjunctas*. Tertio, ſi omnes Coordinatæ ſignis diſſentiant, regiones tantummodo in puncto A ſe tangent, haſque *oppoſitas* vocabimus. Quæ jam regiones cuique ſint conjunctæ vel disjunctæ vel oppoſitæ ſequens tabella exhibebit.

APPEND.

Regio.	*Conjunctæ.*			*Disjunctæ.*			*Oppositæ.*
PQR I	PQr II	PqR III	pQR IV	Pqr V	pQr VI	pqR VII	pqr VIII
PQr II	PQR I	Pqr V	pQr VI	PqR III	pQR IV	pqr VIII	pqR VII
PqR III	Pqr V	PQR I	pqR VII	PQr II	pqR VIII	pQR IV	pQr VI
pQR IV	pQr VI	pqR VII	PQR I	pqr VIII	PQr II	PqR III	Pqr V
Pqr V	PqR III	PQr II	pqr VIII	PQR I	pqR VII	pQr VI	pQR IV
pQr VI	pQR IV	pqr VIII	PQr II	pqR VII	PQR I	Pqr V	PqR III
pqR VII	pqr VIII	pQR IV	PqR III	pQr VI	Pqr V	PQR I	PQr II
pqr VIII	pqR VII	pQr VI	Pqr V	pQR IV	PqR III	PQr II	PQR I

18. Patet ergo quamlibet regionem habere tres ſibi conjunctas, totidem disjunctas, unicamque oppoſitam, atque ex Tabula præcedente ſtatim perſpicitur quemadmodum quælibet regio ad aliam quamcunque ſit comparata. Ordo autem, quem numeri regiones denotantes in iſta Tabula tenent, attentione eſt dignus; qui ut melius in oculos incurrat, eoſdem numeros eodem ordine quadrato ſequenti incluſi.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	5	6	3	4	8	7
3	5	1	7	2	8	4	6
4	6	7	1	8	2	3	5
5	3	2	8	1	7	6	4
6	4	8	2	7	1	5	3
7	8	4	3	6	5	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1

Cujus indoles & proprietates levi attentione percipientur, uſus vero in ſequentibus uberius ob oculos ponetur.

19. Ante

19. Ante jam annotavimus si in æquatione variabilis z ubique habeat pares dimensiones, tum Superficiem duas esse habituram partes similes & æquales; pars scilicet in regione prima æqualis erit parti in secunda, similique modo regiones tertia & quinta, item quarta & sexta, ac denique septima & octava inter se convenient, uti quadrati binæ series ab 1 & 2 incipientes exhibent. Sin autem in æquatione varialis y ubique pares habeat dimensiones, tum regio prima cum tertia, secunda cum quinta, quarta cum septima, & sexta cum octava congruet. Sed si x in æquatione ubique pares habeat dimensiones, tum regio prima cum quarta, secunda cum sexta, tertia, cum septima, & quinta cum octava congruet. Scilicet

si in æquatione pares ubique habeat dimensiones

	variabilis	
z	y	x
convenient regiones	convenient regiones	convenient regiones
1, 2, 3, 4 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7	3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6	4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5

20. Ut partes Superficiei in regionibus disjunctis prima & quinta sitæ inter se sint æquales, tum æquationem ita comparatam esse oportet, ut maneat eadem, etiamsi binæ variabiles y & z negativæ accipiantur. Hoc igitur eveniet si ambæ y & z in singulis æquationis terminis vel pares ubique vel impares dimensiones junctim sumtæ constituant. Quod si autem regio prima congruat cum quinta, tum secunda cum tertia, quarta cum octava, & sexta cum septima conveniet. Simili modo, si in æquatione pro Superficie binæ variabiles x & z vel parem ubique dimensionum numerum, vel imparem ubique adimpleant, tum regio prima cum sexta, secunda cum quarta, tertia cum octava, & quinta cum septima congruet. Scilicet

APPEND.

Si in æquatione pro Superficie ubique vel pares vel ubique impares adimpleant dimensiones

	variabiles	
y & z	x & z	x & y
congruent regiones	congruent regiones	congruent regiones
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4	6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3	7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2

Quod si autem omnes tres variabiles x, y, *&* z *junctim considerata ubique vel pares vel ubique impares teneant dimensiones, tum convenient regiones opposita*

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
8,	7,	6.	5,	4,	3,	2,	1.

21. Si ex his conditionibus duæ vel tres simul in æquatione inesse deprehendantur, tum vel quaternæ vel omnes octo regiones partes Superficiei similes & æquales continebunt. Scilicet

Si & x *&* y, *seorsim considerata ubique pares obtineant dimensiones,*
tum sequentes quaterna regiones congruent

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
3,	5,	1,	7,	2,	8,	4,	6
4,	6,	7,	1,.	8,	2,	3,	5
7,	8,	4,	3,	6,	5,	1,	2

Si & x *&* z *seorsim considerata ubique pares habeant dimensiones,*
tum sequentes quaterna regiones congruent

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
2,	1,	5,	6,	3,	4,	8,	7
4,	6,	7,	1,	8,	2,	3,	5
6,	4,	8,	2,	7,	1,	5,	3.

Si

Si variabiles y *&* z *ſeorſim conſideratæ ubique pares habeant* CAP. I.
dimenſiones,
tum ſequentes quaternæ regiones congruent

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
2,	1,	5,	6,	3,	4,	8,	7
3,	5,	1,	7,	2,	8,	4,	6
5,	3,	2,	8,	1,	7,	6,	4.

22\. Si una variabilium ubique pares habeat dimenſiones, reliquæ vero binæ ſimul conſideratæ vel ubique pares vel ubique impares conſtituant dimenſiones, tum quoque quaternæ regiones congruent, ſequenti modo.

Si z *ubique pares habeat dimenſiones, &* x *&* y *ubique vel*
pares vel impares dimenſiones conſtituant,
tum ſequentes quaternæ regiones congruent

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
2,	1,	5,	6,	3,	4,	8,	7
7,	8,	4,	3,	6,	5,	1,	2
8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1.

Si y *ubique pares habeat dimenſiones, atque* x *&* z *ubique vel*
pares vel impares dimenſiones junctim conſtituant,
tum ſequentes quaternæ regiones congruent

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
3,	5,	1,	7,	2,	8,	4,	6
6,	4,	8,	2,	7,	1,	5,	3
8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1.

Si x *ubique pares habeat dimenſiones, atque* y *&* z *junctim*
conſideratæ ubique vel pares vel impares conſtituant dimenſiones,
tum ſequentes quaternæ regiones congruent

1, 2,

APPEND.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
4,	6,	7,	1,	8,	2,	3,	5
5,	3,	2,	8,	1,	7,	6,	4
8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1.

His ergo tribus caſibus ſimul omnes tres variabiles x, y, & z junctim conſideratæ ubique vel pares vel impares dimenſiones adimplebunt.

23. Superſunt ſequentes caſus quaternarum regionum æqualium.

Si x *&* y *&* y *&* z } *ubique vel pares vel ubique impares dimenſiones conſtituant,*
tum ſequentes quaternæ regiones congruent

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
5,	3,	2,	8,	1,	7,	6,	4
7,	8,	4,	3,	6,	5,	1,	2
6,	4,	8,	2,	7,	1,	5,	3.

Eædem ergo ſimilitudines prodeunt, ſi inſuper binæ reliquæ variabiles x & z ubique vel pares vel impares dimenſiones conſtituant, ita ut hæc conditio jam in propoſita contineatur. Portiones ergo Superficiei in quaternis disjunctis regionibus erunt inter ſe æquales, ſi in æquatione binæ quæque variabiles junctim conſideratæ ubique vel pares vel impares dimenſiones conſtituant. Cum autem tres dentur combinationes, notandum eſt ſi duæ expoſita proprietate fuerint præditæ, tum ſimul tertiam combinationem eadem proprietate eſſe gaviſuram.

24. Quod ſi ad conditiones, quæ quaternas regiones ſimiles & æquales produxerant, nova inſuper accedat in iis non contenta, quæ per ſe æqualitatem in binas regiones inferret, tum omnes prorſus regiones inter ſe fient æquales, atque Superficies conſtabit ex octo partibus inter ſe æqualibus & ſimilibus.

libus. Æquatio ergo pro hujusmodi Superficiebus omnes hactenus memoratas proprietates conjunctim possidebit: scilicet, singulæ variabiles x, y, z seorsim consideratæ ubique pares constituent dimensiones; ex quo jam sequitur binas quasque junctim consideratas, atque etiam omnes tres simul sumtas, ubique pares esse constituturas dimensiones. Cap. I.

25. Utrum autem æquatio inter tres variabiles proposita una duabusve vel adeo tribus exhibitarum proprietatum sit prædita an non, id quidem, quod ad cujusvis variabilis pares dimensiones attinet, facile perspicitur. Neque difficilius est inquirere, utrum omnes variabiles simul consideratæ ubique vel pares vel impares constituant dimensiones. At utrum binæ tantum ad hanc proprietatem sint comparatæ, difficilius erit examinare. Ponatur in æquatione vel $x = nz$, vel $y = nz$, vel $x = ny$, ac dispiciatur utrum uno alterove casu æquatio resultet, in qua variabilis z duobus prioribus casibus, vel y postremo casu, ubique induat pares dimensiones: quod si eveniat, duæ variabiles junctim sumtæ ubique vel pares vel impares dimensiones constituant necesse est; hincque Superficies duas saltem habebit partes inter se similes & æquales.

CAPUT II.

De Sectionibus Superficierum a planis quibuscunque factis.

26. Quemadmodum intersectiones Linearum sunt puncta, ita Superficierum intersectiones sunt Lineæ vel rectæ, vel curvæ. Intersectio duorum planorum est Linea recta, uti ex Elementis constat. Globi autem plano secti figura est Circulus. Plurimum autem ad cognitionem Superficiei affertur subsidii, si Lineas, quibus Superficies a datis planis intersecatur, noverimus. Hoc enim modo simul infinita Su-

APPEND. perficiei puncta innotescunt, cum modo præcedente singuli variabilis unius z valores singula tantum Superficiei puncta præbeant.

TAB. XXXI. *Fig.* 121. 27. Cum igitur Superficies ad tria plana inter se normalia referamus, ante omnia investigari conveniet intersectiones Superficiei & horum planorum. Sumto ergo primo plano APQ, quod variabilibus $AP = x$, $AQ = y$ determinatur, (quoniam tertia variabilis z designat distantiam cujusque Superficiei puncti ab hoc plano,) perspicuum est, si ponatur $z = 0$, ea Superficiei puncta inventum iri, quæ in ipso plano APQ sint sita, atque idcirco æquatio residua inter x & y exhibebit Lineam, qua Superficies a plano APQ intersecatur. Simili modo, si ponatur $y = 0$, æquatio inter x & z exprimet intersectionem Superficiei a plano APR factam; atque, posito $x = 0$, æquatio inter y & z dabit intersectionem Superficiei & plani AQR.

28. Supra jam innuimus Superficiem Globi Centrum in puncto A habentis, cujus radius $= a$, exprimi hac æquatione $xx + yy + zz = aa$; hoc ergo exemplo ad illustrationem harum intersectionum utar. Sit igitur $z = 0$, atque æquatio $xx + yy = aa$, exhibebit intersectionem Globi a plano APQ factam, quam ergo patet esse Circulum Centrum A & radium $= a$, habentem. Simili modo, facto $y = 0$, intersectio Globi a plano APR facta erit Circulus æquatione $xx + zz = aa$, contentus. Eodemque modo, si ponatur $x = 0$, æquatio $yy + zz = aa$, parem Circulum pro intersectione plani AQR indicat. Hæc quidem sunt satis nota, cum Sectiones Globi planis per ejus Centrum transeuntibus factæ omnes sint Circuli maximi, seu cum Globo radium communem habentes.

29. Haud difficilius erit Sectiones Superficiei per plana alia uni istorum planorum principalium parallela factas determinare. Concipiatur planum plano APQ parallelum ab eoque distans intervallo $= h$, omnia ergo Superficiei puncta, quorum ab eodem plano APQ distantia, quæ per variabilem z indicatur, est $= h$, simul in isto plano parallelo sita erunt, ideoque intersectionem

terſectionem formabunt. Pro hac ergo interſectione æquatio habebitur, ſi in æquatione pro Superficie ponatur $z = h$; tum enim habebitur æquatio inter binas Coordinatas orthogonales x & y naturam ſectionis exprimens. Eodem autem modo ſectiones, quæ per plana vel ipſi APR vel AQR parallela fiunt, definientur, unde ſuperfluum foret, quæ de uno dicta ſunt, in reliquis repetere.

30. Si ergo in æquatione pro Superficie inter tres Coordinatas x, y & z, una earum z ponitur conſtans $= h$, tum ſectio Superficiei per planum plano APQ parallelum ab eoque intervallo h diſtans formata oritur. Quod ſi ergo ſucceſſive huic litteræ h omnes valores poſſibiles, tam affirmativi quam negativi, tribuantur, tum omnes ſectiones Superficiei, quæ a planis plano APQ parallelis formantur, obtinentur: atque, cum tota Superficies hujuſmodi planis parallelis in partes infinitas diſſecari poſſit, hocque modo omnes ſectiones cognoſcantur, ex iſtis omnibus ſectionibus tota Superficies innoteſcet. Omnes ſcilicet iſtæ ſectiones unica æquatione inter Coordinatas x & y, conſtantem indeterminatam h involvente, exprimentur; ex quo omnes iſtæ ſectiones erunt Lineæ vel ſimiles vel ſaltem affines una æquatione contentæ.

31. Omnes ergo ſectiones Superficiei plano APQ parallelæ erunt inter ſe æquales, atque a planis APR, AQR æquali modo trajicientur, ſi æquatio inter x & y ita fuerit comparata, ut eadem maneat quicunque valor ipſi h tribuatur. Hoc autem evenire nequit, niſi variabilis z, cujus loco h eſt poſita, prorſus deſit in æquatione pro Superficie. Quo circa, ſi variabilis tertia z in æquationem Superficiei omnino non ingrediatur, tum omnes ſectiones plano APQ parallelæ erunt inter ſe æquales; quarum natura exprimetur ipſa Superficiei æquatione; quippe, quæ duas tantum variabiles x & y involvit. Simili vero modo, ſi in æquatione pro Superficie vel variabilis x vel y deſit, tum omnes ſectiones vel plano AQR vel plano APR parallelæ inter ſe congruent.

APPEND. 32. Hujusmodi ergo Superficies non solum animo facile concipitur, sed etiam construitur atque in data materia efformatur. Ponamus enim in æquatione deesse variabilem z, ita ut æquatio tantum sit inter Coordinatas $AP = x$ & $AQ = PM = y$; ex hac in plano APQ describatur Linea curva
TAB. XXXI. Fig. 122. BMD. Quo facto concipiatur Linea recta infinita ad planum hoc perpetuo normalis secundum Lineam hanc curvam BMD circumferri; atque hæc recta motu suo producet seu efformabit Superficiem, per eam æquationem indicatam. Unde perspicuum est, si Linea BMD fuerit Circulus, tum Superficiem ex eo ortam fore Cylindri recti; sin autem Linea BMD fuerit Ellipsis, tum Superficiem Cylindri scaleni generari. Quod si Linea BMD non fuerit continua, sed ex pluribus rectis conflata figuram exhibens rectilineam, tum Superficies resultabit prismatica.

33. Quod hoc Superficierum genus Cylindros & omnia Prismata in se complectitur, universum hoc genus Superficierum appellari conveniet *cylindricum*, seu *prismaticum*; singulæ autem species sub hoc genere contentæ determinabuntur per figuram planam BMD, ex qua, modo ante descripto, sint ortæ: atque ista figura BMD *Basis* appellabitur. Quoties ergo in æquatione pro Superficie una trium variabilium x, y, z deest, tum Superficies hac æquatione contenta erit cylindrica seu prismatica. Quod si autem duæ variabiles y & x simul desint; tum ob $x =$ Constanti, Linea BMD abibit in rectam ad Axem AD normalem, atque propterea Superficies fiet plana normalis ad planum APQ.

34. Post hoc Superficierum genus maxime notari meretur id, quod oritur ex æquatione inter tres variabiles x, y & z homogenea, seu in qua tres istæ variabiles ubique eundem dimensionum numerum constituunt, cujusmodi est $zz = mxz + xx + yy$. Hinc enim omnes sectiones, quæ fiunt per plana uni ex tribus principalibus parallela, erunt figuræ inter se similes. Namque, si tribuatur ipsi z valor constans h, manifestum est æquationem $hh = mhx + xx + yy$, si pro h successive

ſive alii aliique valores tribuantur, infinitas continere figuras inter ſe ſimiles; quarum Parametri ſint æquales, ſeu proportionales ipſi b. Cum igitur hæ ſectiones non ſolum ſint ſimiles, ſed etiam creſcant in ratione diſtantiarum a plano APQ, Lineæ, quæ ex puncto A per ſingularum ſectionum puncta homologa ducuntur, erunt rectæ. CAP. II.

35. Propoſita ergo hujuſmodi æquatione inter tres variabiles x, y, & z homogenea, tribuatur ipſi z valor datus $AR = h$; ſitque $TSsMm$ figura in plano ipſi APQ parallelo & per punctum R ducto, quam exhibebit æquatio inter x & y, ita ut ſit $RV = x$, & $VM = y$. Quod ſi ergo hæc ſectio una $TSsMm$ fuerit deſcripta, concipiatur circa ejus Perimetrum circumduci Linea recta infinita perpetuo per punctum A tranſiens; atque hæc recta motu ſuo deſcribet Superficiem in æquatione propoſita contentam. Perſpicuum vero eſt, ſi figura $TSsMm$ fuerit Circulus Centrum in R habens, tum prodire Conum rectum; ſin R non ſit Centrum, Conum ſcalenum: at, ſi illa figura fuerit rectilinea, orientur cujuſque generis Pyramides. Quam ob rem Superficies, quæ in hoc æquationum generum continentur, hic *conicas* ſeu *pyramidales* vocabimus. TAB. XXXI. Fig. 123.

36. Ex his manifeſtum eſt, ſi æquatio inter tres variabiles x, y & z fuerit homogenea, atque adeo Superficies conica ſeu pyramidalis; tum non ſolum omnes ſectiones uni plano principali APQ parallelas inter ſe eſſe figuras ſimiles, quarum Parametri ſint diſtantiis ſectionum a vertice A proportionales; ſed, ob eandem rationem, intelligitur quoque, omnes ſectiones, quæ ſint vel plano APR vel plano AQR parallelæ, eadem illa proprietate eſſe præditas, ut ſint figuræ inter ſe ſimiles, quarum latera homologa teneant diſtantiarum ab A rationem. Infra vero oſtendetur, omnes omnino ſectiones hujuſmodi Corporum, quæ ſunt inter ſe parallelæ, ſeu quæ ſunt parallelæ plano cuicunque per Verticem A ducto, inter ſe quoque fore ſimiles, earumque Parametros diſtantiis a vertice A eſſe proportionales.

APPEND. 37. Latius patet genus Superficierum, ad quod nunc ſum progreſſurus. Sit Z Functio quæcunque ipſius z; ac proponatur æquatio quæcunque homogenea inter tres variabiles x, y, & Z. Fiat $Z = H$, poſita $z = h$: &, cum hoc caſu prodeat æquatio homogenea inter x, y & H, erunt omnes ſectiones, plano *APQ* parallelæ, figuræ inter ſe ſimiles; quarum Parametri autem non diſtantiis h, ſed earum Functionibus H erunt proportionales. Ex quo Lineæ per harum ſectionum puncta homologa ductæ non erunt Lineæ rectæ, ſed Curvæ a Functionis Z ratione pendentes. Tum vero etiam hinc non ſequitur, ſectiones, quæ alio cuipiam plano ſint parallelæ, fore inter ſe ſimiles.

38. In hoc genere ambo præcedentia continentur. Si enim fuerit $Z = z$, ſeu $Z = \alpha z$, ob æquationem inter x, y & z homogeneam, orientur Superficies conicæ. Idem evenit, ſi fuerit $Z = \alpha + \beta z$; hoc tantum diſcrimine, quod Vertex Coni non in ipſum punctum *A* cadat; ſcilicet, ſi fuerit $Z = \frac{b - z}{b}$, Vertex Coni ab *A* diſtabit intervallo b. Quod ſi jam ſtatuatur $b = \infty$, figura conica abibit in cylindricam, fietque $Z = 1$. Hinc æquatio pro Superficiebus cylindricis ita erit comparata, ut in ea variabiles x & y una cum conſtanti 1 ubique eundem dimenſionum numerum adimpleant. Quomodocunque autem æquatio inter x & y fuerit comparata, ſi tertia variabilis z in eam non ingrediatur, ſemper per unitatem homogeneitas impleri poteſt: unde, uti ſupra jam oſtendimus, omnis æquatio una variabili carens exprimit Superficiem cylindricam.

39. Inter hæc Corpora, in quibus omnes ſectiones, uni plano principali *APQ* parallelæ, ſunt figuræ ſimiles, maxime notatu ſunt digna ea, quorum iſtæ ſectiones ſunt Circuli Centra in eadem recta *AR* ad planum *APQ* normali habentes. Hujuſmodi Corpora torno efformantur, indeque *tornata* appellantur. Pro hujuſmodi ergo Corporibus æquatio generalis erit $ZZ = xx + yy$: quicunque enim valor variabili z tribuatur,

tur, ut fiat $Z = H$, prodibit pro sectione plano APQ parallela æquatio $HH = xx + yy$, quæ est pro Circulo radium $= H$ & Centrum in recta AR habente. Si fuerit $ZZ = zz$, habebitur Conus rectus: sin $ZZ = aa$, Cylindrus; &, si $ZZ = aa - zz$ prodibit Globus, quæ sunt species præcipuæ Corporum tornatorum. CAP. II.

40. Contemplemur ejusmodi Corpora, quorum omnes sectiones PTV normales ad Axem AP sint Triangula, horumque Apices T in Linea recta DT Axi AP parallela sitæ. Sit AVB Basis hujus Corporis, seu ejus sectio in plano APQ facta, quæ sit Curva quæcunque. Sit distantia rectæ DT ab Axe AB, nempe $AD, = c$: positisque, ut hactenus, tribus variabilibus $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$; erit PV Functio quæpiam ipsius x: sit ea $PV = P$: erit, ob triangula VQM, VPT similia, $P : c = P - y : z$; seu $z = c - \frac{cy}{P}$. Pro hujusmodi ergo Corporibus æquabitur $\frac{c - z}{y}$ Functioni cuipiam ipsius x. Differunt igitur hæc Corpora a conicis, quod desinant in aciem rectam DT, cum conica desinant in cuspidem. Si Basis AVB ponatur Circulus, Corpus resultans a WALLISIO fusius est pertractatum, atque *Cono-cuneus* appellatum. TAB. XXXII. *Fig.* 124.

41. Sint, ut modo, omnes sectiones Axi AB normales PTV triangula ad P rectangula, quorum Vertice autem T constituant Curvam quamcunque AT: Basis autem sit figura AVB. Positis tribus variabilibus $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; erit in Curva AVB, recta PV Functio quædam ipsius x quæ sit $= P$: tum vero erit PT quoque Functio ipsius x, quæ sit $= Q$; quibus positis erit TAB. XXXII. *Fig.* 125.

$$P : Q = P - y : z;$$

ideoque $z = Q - \frac{Qy}{P}$, seu $Pz + Qy = PQ$, vel $\frac{z}{Q} + \frac{y}{P} = 1$, vel constanti. Quod si ergo in æquatione ambæ

variabi-

APPEND. variabiles y & z una plures dimensiones nusquam constituant, tum Corpus ad hoc genus pertinebit, quod hic descripsimus.

TAB. XXXII. Fig. 126. 42. Quoniam jam sumus contemplati ea Corpora, quorum omnes sectiones, uni plano principali parallelæ, sunt inter se similes: nunc ea consideremus, in quibus omnes istiusmodi sectiones sint figuræ inter se saltem affines; seu, quæ, sumtis Abscissis homologis, habeant Applicatas inter se proportionales. Sint igitur hujusmodi Corporis tres sectiones principales ABC, ACD, & ABD, quarum isti ACD omnes sectiones parallelæ debeant esse figuræ affines. Quare in ea ponatur Basis $AC = a$, & altitudo $AD = b$; sumtisque Coordinatis $Aq = p$, & $qm = q$, sit q Functio quæcunque ipsius p. Concipiatur nunc sectio quæcunque parallela PTV, posito intervallo $AP = x$; eritque Basis $PV =$ Functioni ipsius x, quæ sit $= \mathrm{P}$, & altitudo $PT =$ Functioni ipsius x, quæ sit $= \mathrm{Q}$. Vocetur jam $PQ = y$ & $QM = z$; atque, ex affinitatis natura, erit $a : p = \mathrm{P} : y$ & $b : q = \mathrm{Q} : z$; seu $y = \frac{\mathrm{P}p}{a}$, & $z = \frac{\mathrm{Q}q}{b}$.

43. Quod si ergo datæ fuerint omnes tres sectiones principales Corporis, ABC, ACD, & ABD; hinc natura ipsius Corporis determinabitur, quod habeat omnes sectiones, ipsi ACD parallelas, simul eidem affines. Primum enim dantur P & Q Functiones ipsius x; tum vero est q Functio ipsius p; unde, ex binis variabilibus x & p, definiuntur ambæ variabiles y & z. Verum, si æquationem inter tres Coordinatas x, y & z desideremus; quoniam q est Functio ipsius p; seu, quia datur æquatio inter p & q, in hac æquatione substituatur $p = \frac{ay}{\mathrm{P}}$, & $q = \frac{bz}{\mathrm{Q}}$; sicque, ob P & Q Functiones ipsius x, orietur æquatio inter tres Coordinatas x, y & z, qua natura Corporum ad hoc genus pertinentium exprimetur. Patet autem, posito $x = 0$, fieri oportere $\mathrm{P} = a$ & $\mathrm{Q} = b$.

44. Si

44. Si in æquatione pro Superficie duæ variabiles y & z ubique eundem dimenſionum numerum conſtituant, tum omnes ſectiones ad Axem AP normales erunt figuræ rectilineæ. Poſito enim pro x valore quocunque conſtante, prodibit æquatio inter y & z homogenea, quæ unam pluresve Lineas rectas indicat. Cum igitur numerus dimenſionum, qui a binis y & z conſtituitur, ubique ſit idem, vel par erit vel impar; & hanc ob rem, uti ſupra §. 20. oſtenſum eſt, hujuſmodi Corpora binas habebunt partes inter ſe æquales. Scilicet portiones in regionibus prima & quinta inter ſe erunt ſimiles, tum vero etiam in regione ſecunda & tertia, & ita de ceteris, uti Tabella loco citato indicat. CAP. II.

45. Jam plures hic contemplati ſumus Corporum ſpecies, in quibus dantur infinitæ ſectiones rectilineæ; veluti hanc ultimo pertractatam, & cylindricas atque conicas. Hæ vero ita ſunt comparatæ ut ſectiones per Axem AP factæ ſint rectilineæ; hoc autem genus latius patet. Sit enim $AKMP$, ſectio Corporis per Axem AP facta, ad angulum $MPV = \phi$; poſitis $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$, erit $\frac{z}{y}$ Tangens anguli ϕ; & recta $PM = \frac{z}{\text{ſin.}\,\phi}$. Quod ſi jam Linea KM ſit recta, debebit eſſe $\frac{z}{\text{ſin.}\,\phi} = \alpha x + \beta$; ubi α & β erunt conſtantes ab angulo ϕ pendentes: ideoque erunt Functiones nullius dimenſionis ipſarum y & z. Sint R & S hujuſmodi Functiones: eritque $x = \mathrm{R}z + \mathrm{S}$; ſeu $x = \mathrm{R}y + \mathrm{S}$. Vel, denotante T Functionem unius dimenſionis, & S nullius dimenſionis ipſarum y & z, omnia hujuſmodi Corpora continebuntur in hac æquatione generali $x = \mathrm{T} + \mathrm{S}$. TAB. XXXII. *Fig.* 127.

46. Quæcunque autem fuerit propoſita Superficies, cujus natura per æquationem inter tres variabiles x, y, & z definiatur, facile erit ejus ſectionem quamvis ſecundum Axem AP factam determinare. Sit enim angulus VPM, quo iſta

APPEND. ſectio $AKMP$ ad planum $ACVP$ inclinatur, $= \Phi$; & ponatur recta $PM = v$, quæ erit Applicata ſectionis quæſitæ; quo facto habebitur $QM = z = v. \sin. \Phi$, & $PQ = y = v. \cos. \Phi$. Quod ſi ergo in æquatione pro Superficie loco variabilium y & z iſti valores $v. \cos. \Phi$ & $v. \sin. \Phi$ ſubſtituantur, orietur æquatio inter duas variabiles x & v, qua natura ſectionis $AKMP$ exprimetur. Simili vero modo omnes quoque ſectiones, quæ fiunt ſecundum alterutrum binorum reliquorum Axium principalium AQ vel AR, invenientur. Tres enim iſti Axes AP, AQ & AR, a quibus tres variabiles x, y & z pendent, ita inter ſe ſunt permutabiles, ut perpetuo, quicquid de eorum uno docetur, ad binos reliquos transferatur.

TAB. XXXI. *Fig.* 121.

47. Samto ergo plano APQ pro norma, ad quod omnes ſectiones Superficiei referantur; ſectio quæcunque plano facta vel erit parallela huic plano, vel ad id erit inclinata; hocque caſu planum ſectionis continuatum alicubi interſecabit planum APQ, atque interſectio iſtorum planorum erit Linea recta. Priori quidem caſu, quo planum ſectionis parallelum eſt plano APQ, natura ſectionis innoteſcet tribuendo quantitati z valorem conſtantem. Poſteriori vero caſu, quo planum ſectionis ad planum APQ inclinatur, naturam ſectionis adhuc tantum definire licet, ſi vel recta AP vel recta AQ fuerit interſectio plani ſecantis cum plano APQ. Ad omnes ergo omnino ſectiones eruendas ſupereſt, ut quaſcunque alias binorum illorum planorum interſectiones contemplemur.

TAB. XXXIII. *Fig.* 128.

48. Sit recta ES, Axi AP parallela, interſectio plani ſecantis cum plano APQ: anguluſque inclinationis QSM, quo planum ſecans ESM ad planum APQ inclinatur, ponatur $= \Phi$, & diſtantia AE vocetur $= f$. Cum jam ſit $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; erit $ES = x$, & $QS = y + f$. Quod ſi ergo ſectio ad rectam ES tanquam Axem referatur, erit Abſciſſa $ES = x$, Applicata vero SM ponatur $= v$; unde, ob angulum $QSM = \Phi$, obtinebitur $QM = z = v \sin \Phi$, & $SQ = y + f = v. \cos. \Phi$, hincque $y = v. \cos. \Phi - f$. Quare, ſi in æquatione pro Superficie

inter

inter x, y, & z, ſubſtituatur $y = v.cof.\phi - f$ & $z = v.fin.\phi$, orietur æquatio inter Coordinatas x & v ſectionis ESM quæſitæ. Si interſectio ES eſſet normalis ad Axem AP; tum, quia foret parallela alteri Axi principali in plano APQ exiſtenti, permutandis variabilibus x & y, ſectio eodem modo invenietur. CAP. II.

49. Habeat jam interſectio ES in plano APQ poſitionem quamcunque; cui recta AE, ad Axem AP normalis, occurrat in puncto E. Tum ducatur ETX Axi AP parallela, & ponatur $AE = f$, & angulus $TES = \theta$. Sumtis porro tribus variabilibus $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; ex Q ad ES ducatur normalis QS, & jungatur, recta MS, erit angulus QSM inclinatio plani ſecantis ad planum APQ, qui ponatur $= \phi$. Deinde vero ſint ſectionis quæſitæ Coordinatæ $ES = t$ & $SM = v$. Ex S ad EX & QP productam ducantur perpendicula ST & SV; eritque $QM = z = v.fin.\phi$; $QS = v.cof.\phi$; $SV = v.cof.\phi.fin.\theta$, & $QV = v.cof.\phi.cof.\theta$. Poſtea vero, erit $ST = VX = t.fin.\theta$, & $ET = t.cof.\theta$. Ex his colligitur tandem $AP = x = t.cof.\theta + v.cof.\phi.fin.\theta$, & $PQ = y = v.cof.\phi.cof.\theta - t.fin.\theta - f$; qui valores, ſi loco x, y & z ſubſtituantur, dabunt æquationem pro ſectione quæſita. TAB. XXXIII. Fig. 129.

50. Data ergo æquatione pro Solido quocunque, ex ea facile elici poteſt æquatio pro Sectione ejus quacunque plana. Ac primo quidem perſpicuum eſt, ſi æquatio pro Solido inter tres Coordinatas x, y & z, fuerit algebraïca, tum quoque omnes ejus ſectiones fore Curvas algebraïcas. Deinde vero, cum æquatio inter Coordinatas ſectionis t & v oriatur, ponendo in æquatione pro Solido $z = v.fin.\phi$, $x = t.cof.\theta + v.cof.\phi.fin.\theta$, & $y = v.cof.\phi.cof.\theta - t.fin.\theta - f$, manifeſtum eſt in æquatione pro quavis ſectione Coordinatas t & v plures dimenſiones obtinere non poſſe, quam in æquatione pro Solido tres Coordinatæ x, y & z conſtituant. Fieri tamen quandoque poteſt ut æquatio pro ſectione ad ordinem

Xx 2 inferiorem

APPEND. inferiorem referatur; fupremis fcilicet membris, poft fubftitutionem, fe fe tollentibus.

51. Si igitur in æquatione pro Superficie tres variabiles x, y & z unicam tantum conftituant dimenfionem, ita ut æquatio fit hujufmodi $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$; tum omnes hujus Superficiei fectiones erunt Lineæ rectæ. Erit autem hoc cafu Superficies plana; uti, cum attendenti facile patebit, tum infra clarius oftendetur: atqui ex Elementis notum eft fectionem duorum planorum Lineam rectam effe oportere. Simili modo hinc intelligitur omnium Solidorum, quorum natura hac generali æquatione contineatur

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \epsilon xz + \zeta yz + ax + by + cz + ee = 0;$$

fingulas fectiones, nifi fint Lineæ rectæ, Lineas fecundi ordinis effe debere, neque ullam dari fectionem, cujus natura per æquationem fecundi gradus exprimi nequeat.

C A P U T III.

De fectionibus Cylindri, Coni & Globi.

52. QUoniam hæc Corpora in Elementis Stereometriæ confiderari folent, eorum fectiones hic antea inveftigari conveniet, quam ad Solida alia minus nota progrediamur. Primum igitur, Cylindrorum duæ occurrunt fpecies in Elementis, *rectorum* fcilicet ac *fcalenorum*. Cylindrus *rectus* vocatur, cujus omnes fectiones ad Axem normales fint Circuli inter fe æquales, atque Centra in eadem Linea recta difpofita habentes. Cylindrus autem *fcalenus* fectiones ad Axem, non normales fed fub dato angulo inclinatas, habet circulares; quæ affectio commodius ita exprimetur, ut dicamus Cylindrum obliquum feu fcalenum effe cujus omnes fectiones ad

ad Axem normales ſint Ellipſes æquales, quarum Centra in eadem Linea recta, quæ Axis Cylindri vocatur, ſint poſita. CAP. III.

53. Sit igitur Cylindrus, ſive rectus ſive ſcalenus, cujus Axis CD perpendiculariter inſiſtat plano tabulæ; ſitque ejus Baſis $AEBF$, ſeu ſectio a plano tabulæ formata, vel Circulus vel Ellipſis. Aſſumam vero hanc Baſin eſſe Ellipſin quamcunque, Centrum in C & Axes conjugatos AB & EF habentem; quoniam, quæ de Cylindro ſcaleno tradentur, facillime ad rectum accommodabuntur. Ponatur ergo alter ſemiaxis $AC = BC = a$, alter vero $CE = CF = c$; poſitis nunc tribus Coordinatis $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; erit, ex natura Ellipſis, $aacc = aayy + ccxx$; quæ eadem æquatio exprimet naturam Cylindri, cum tertia variabilis z, ob omnes ſectiones plano CPQ parallelas inter ſe æquales, in æquationem non ingrediatur. TAB. XXXIII. *Fig.* 130.

54. Hujus ergo Cylindri omnes ſectiones Baſi parallelæ eidem erunt ſimiles & æquales. Scilicet Circuli in Cylindro recto & Ellipſes in ſcaleno. Tum vero ſectiones, quæ fiunt ſecundum plana ad APQ normalia, erunt Lineæ rectæ, binæ inter ſe parallelæ, quæ, ubi Cylindrus tangetur a plano, in unum coaleſcent; atque adeo imaginariæ evadunt, ſi planum Cylindro prorſus non occurrat. Hoc ipſum ex æquatione ſponte ſequitur; ſi enim vel x vel y vel $x \pm \alpha y$ ponatur conſtans ad denotandam interſectionem plani ſecantis & Baſis, tum æquatio duas habebit radices ſimplices. Sicque determinavimus jam ſectiones omnes, quæ fiunt per plana, uni trium planorum principalium parallela.

55. Ad naturam reliquarum ſectionum indagandam, ponamus planum ſecans cum plano Baſis interſectionem conſtituere rectam Lineam GT, quæ primo ſit parallela alteri Axi conjugato EF, ſeu ad alterum AB productum in G normalis. Hoc poſito, ſit diſtantia $CG = f$, & inclinatio plani ſecantis GTM ad Baſim menſuretur angulo $= \phi$. Occurrat planum ſecans GTM Axi Cylindri in D; &, ducta recta DG, erit

APPEND. $DGC = \phi$, ac propterea $DG = \frac{f}{cos.\phi}$ & $CD = \frac{f.\,sin.\phi}{cos\,\phi}$. Ex sectionis quæsitæ puncto quovis M ducatur MT parallela ipsi DG: atque, ob $TQ = f - x$, & angulum $QTM = \phi$, erit $TM = \frac{f-x}{cos.\phi}$ & $QM = \frac{(f-x).\,sin\,\phi}{cos.\phi} = z$. Ducatur MS parallela ipsi TG, ideoque normalis in DG, erit $MS = TG = PQ = y$, & $DS = \frac{x}{cos.\phi}$.

56. Sumantur nunc rectæ DS & SM pro Coordinatis sectionis quæsitæ; sitque $DS = t$, & $SM = u$. Hinc erit $y = u$, $x = t.\,cos.\phi$: &, ob $z = \frac{(f-x).\,sin.\,\phi}{cos.\phi}$, erit $z = f.tang.\phi - t.sin.\phi$. Substituantur isti valores in æquatione pro Cylindro $aacc = aayy + ccxx$, atque resultabit pro sectione quæsita ista æquatio $aacc = aauu + cctt\,(cos.\phi)^2$: quæ indicat sectionem fore Ellipsin Centrum in puncto D habentem, cujus alter Axis principalis in rectam DG cadat, alter vero ad hunc sit normalis. Erit vero semiaxis in rectam DG cadens (facto $u = 0$) $= \frac{a}{cos.\phi}$. Vel, ducatur recta BH parallela ipsi GD, erit $BH = \frac{a}{cos.\phi}$ alter semiaxis sectionis quæsitæ, alter vero conjugatus erit $= c = CE$.

57. Erit ergo sectio Cylindri hoc modo orta Ellipsis, cujus semiaxes conjugati erunt $\frac{a}{cos.\phi}$ & c. Quod si ergo in Basi $AEBF$ fuerit $AC = a$ semiaxis major; tum, ob $\frac{a}{cos.\phi}$ majorem quam a, sectiones erunt Ellipses magis oblongæ, quam Basis. Sin autem fuerit c minor quam a: seu, si intersectio GT fuerit Axi majori Basis parallela, tum fieri potest ut in sectione ambo Axes fiant inter se æquales, atque adeo sectio Circulus evadat. Eveniet hoc si fuerit $\frac{a}{cos.\phi} = c$, seu $cos.\phi = \frac{a}{c}$.

$\frac{a}{c}$. Cum igitur ſit in Triangulo BCH ad C rectangulo angulus $CBH = \phi$, erit $cos. \phi = \frac{BC}{BH} = \frac{a}{BH}$. Quare, ſi ſumatur $BH = CE$, ſectiones erunt Circuli, quod cum duplici modo fieri queat, rectam $BH = CE$ ſive ſupra ſive infra conſtituendo, binæ exiſtent ſectionum circularium ſeries, quæ ad Axem CD oblique erunt inclinatæ; ex quo hujuſmodi Cylindri ſcaleni appellantur. Cap. III.

58. Sit nunc recta GT, utcunque oblique poſita, interſectio plani ſecantis cum Baſi, ad quam ex Centro Baſis C demittatur perpendiculum $GC = f$; & ponatur angulus $BCG = \theta$; ſitque angulus inclinationis $CGD = \phi$, cui æqualis erit angulus QTM, ducta QT ad GT normali. Erit ergo $DG = \frac{f}{cos. \phi}$, & $CD = \frac{f. sin. \phi}{cos. \phi}$. Sit M punctum in ſectione quæſita, unde ad Baſin perpendiculum MQ hincque porro ad Axem QP demittatur; ita ut, vocatis $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, ſit $aacc = aayy + ccxx$. Ducantur porro ad interſectionem GT normales PV, QT; erit $GV = x. sin. \theta$, $PV = f - x. cos. \theta$; &, ob angulum $QPW = \theta$, fiet $QW = y. sin. \theta$, $PW = VT = y. cos. \theta$, & $QT = f - x. cos. \theta + y. sin. \theta$. Denique, ducta MT, ob angulum $MTQ = \phi$, erit $TM = \frac{z}{sin. \phi}$ & $QT = \frac{z. cos. \phi}{sin. \phi}$. Tab. XXXIV. Fig. 131.

59. Compleatur parallelogrammum rectangulum $GSMT$; & vocetur $DS = t$, $SM = GT = u$: eritque $u = GV + VT = x. sin. \theta + y. cos. \theta$. At, ob $QT = f - x. cos. \theta + y. sin. \theta$, erit $QT - CG = y. sin. \theta - x. cos. \theta$, ex quo fit $DS = TM - DG = \frac{y. sin. \theta - x. cos. \theta}{cos. \phi} = t$. Cum igitur ſit $x. sin. \theta + y. cos. \theta = u$, & $y. sin. \theta - x. cos. \theta = t. cos. \phi$, habebitur $y = u. cos. \theta + t. sin. \theta. cos. \phi$, & $x = u. sin. \theta - t. cos. \theta. cos. \phi$. Qui valores in æquatione $aacc = aayy + ccxx$ loco x & y ſubſtituti dabunt

$aacc =$

APPEND.

$$aacc = \frac{aauu\,(cos.\theta)^2 + 2aaut.sin.\theta.cos.\theta.cos.\phi + aatt\,(sin.\theta)^2\,(cos.\phi)^2}{ccuu\,(sin.\theta)^2 - 2ccut.sin.\theta.cos.\theta.cos.\phi + cctt\,(cos.\theta)^2\,(cos.\phi)^2}$$

quam æquationem patet eſſe ad Ellipſin, cujus Centrum ſit in D, at Coordinatæ DS & SM ad Axes principales non ſint normales, niſi ſit $a = c$ ſeu Cylindrus rectus.

TAB. XXXIV. *Fig.* 132. 60. Ad hanc ſectionem propius cognoſcendam, ſit $aMebf$ Curva, cujus æquatio eſt inventa inter Coordinatas $DS = t$ & $MS = u$; ſitque, brevitatis ergo iſta æquatio $aacc = \alpha uu + 2\beta tu + \gamma tt$; ita, ut pro caſu præſente, habeatur

$$\alpha = aa\,(cos.\theta)^2 + cc\,(sin.\theta)^2$$

&

$$\beta = (aa - cc).\,sin.\,\theta.\,cos.\,\theta.\,cos.\,\phi$$

atque

$$\gamma = aa\,(sin.\,\theta)^2\,(cos.\,\phi)^2 + cc\,(cos.\,\theta)^2\,(cos.\,\phi)^2.$$

Sint hujus ſectionis ab & ef Axes principales conjugati, ductaque ad eorum alterutrum Applicata Mp, vocetur $Dp = p$ & $Mp = q$; ac ponatur angulus $aDH = \zeta$; erit $u = p.sin.\zeta + q.cos.\zeta$ & $t = p.cos.\zeta - q\,sin.\zeta$, quibus valoribus ſubſtitutis, fiet

$$aacc = \begin{array}{l} + \alpha(sin.\zeta)^2 \\ + 2\beta.sin.\zeta.cos.\zeta \\ + \gamma.(cos.\zeta)^2 \end{array} pp \begin{array}{l} + 2\alpha.sin.\zeta.cos.\zeta \\ + 2\beta.(cos.\zeta)^2 \\ - 2\beta.(sin.\zeta)^2 \\ - 2\gamma.sin.\zeta.cos.\zeta \end{array} pq \begin{array}{l} + \alpha(cos.\zeta)^2 \\ - 2\beta.sin.\zeta.cos.\zeta \\ + \gamma.(sin.\zeta)^2 \end{array} qq$$

61. Hæc jam æquatio cum referatur ad Diametrum orthogonalem, coëfficiens ipſius pq debet eſſe $= 0$: unde, ob $2.sin.\zeta.cos.\zeta = sin.\,2\zeta$, & $(cos.\zeta)^2 - (sin.\zeta)^2 = cos.\,2\,\zeta$, fiet $(\alpha - \gamma).\,sin.\,2\,\zeta + 2\,\beta.\,cos.\,2\,\zeta = 0$: ideoque $tang.\,2\,\zeta = \frac{2\beta}{\gamma - \alpha}$: unde angulus aDH, ac proinde poſitio Diametrorum principalium cognoſcitur. Hinc porro ipſi ſemiaxes definiuntur, hoc modo

$$aD = \frac{ac}{\sqrt{(\alpha(\sin.\zeta)^2 + 2\beta.\sin.\zeta.\cos.\zeta + \gamma(\cos.\zeta)^2)}}$$
&

$$eD = \frac{ac}{\sqrt{(\alpha(\cos.\zeta)^2 - 2\beta.\sin.\zeta.\cos.\zeta + \gamma(\sin.\zeta)^2)}}.$$

62. Quia eſt $2\beta = \frac{2(\gamma - \alpha).\sin.\zeta.\cos.\zeta}{\cos.\zeta^2 - \sin.\zeta^2}$, erit, valore hoc in expreſſionibus inventis ſubſtituto,

$$aD = \frac{ac\sqrt{(\cos.\zeta^2 - \sin.\zeta^2)}}{\sqrt{(\gamma.\cos.\zeta^2 - \alpha.\sin.\zeta^2)}} = \frac{ac\sqrt{2.\cos.2\zeta}}{\sqrt{((\alpha+\gamma).\cos.2\zeta - \alpha + \gamma)}}$$
&

$$eD = \frac{ac\sqrt{(\cos.\zeta^2 - \sin.\zeta^2)}}{\sqrt{(\alpha.\cos.\zeta^2 - \gamma.\sin.\zeta^2)}} = \frac{ac\sqrt{2.\cos.2\zeta}}{\sqrt{((\alpha+\gamma).\cos.2\zeta + \alpha - \gamma)}}.$$

Horum ergo ſemiaxium productum erit

$$aD.eD = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{\sqrt{(2\alpha\gamma(1+(\cos.2\zeta)^2) - \alpha\alpha + \gamma\gamma)(\sin.2\zeta)^2)}}.$$

At, cum ſit

$$(\gamma - \alpha).\sin.2\zeta = 2\beta.\cos.2\zeta$$

erit

$$(\alpha\alpha + \gamma\gamma)(\sin.2\zeta)^2 = 4\beta\beta(\cos.2\zeta)^2 + 2\alpha\gamma(\sin.2\zeta)^2$$

ideoque

$$aD.eD = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{\sqrt{(4\alpha\gamma(\cos.2\zeta)^2 - 4\beta\beta(\cos.2\zeta)^2)}} = \frac{aacc}{\sqrt{(\alpha\gamma - \beta\beta)}} = \frac{ac}{\cos.\Phi}.$$

63. Simili modo, cum ſint quadrata

$$aD^2 = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{(\alpha+\gamma).\cos.2\zeta - \alpha + \gamma}$$
&

$$eD^2 = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{(\alpha+\gamma).\cos.2\zeta + \alpha - \gamma},$$

erit

$$aD^2 + eD^2 = \frac{4aacc.(\alpha+\gamma)(\cos.2\zeta)^2}{4\alpha\gamma(\cos.2\zeta)^2 - 4\beta\beta(\cos 2\zeta)^2} = \frac{(\alpha+\gamma)aacc}{\alpha\gamma - \beta\beta}.$$

Hincque elicitur

APPEND. $$aD + eD = \frac{ac\sqrt{(\alpha + \gamma + 2\sqrt{(\alpha\gamma - 66)})}}{\sqrt{(\alpha\gamma - 66)}}$$
&
$$aD - eD = \frac{ac\sqrt{(\alpha + \gamma - 2\sqrt{(\alpha\gamma - 66)})}}{\sqrt{(\alpha\gamma - 66)}}$$
Semiaxes ergo aD & eD erunt radices hujus æquationis
$$(\alpha\gamma - 66)x^4 - (\alpha + \gamma)\,aaccxx + a^4c^4 = 0,$$
at eſt
$$\sqrt{(\alpha\gamma - 66)} = ac.\,cof.\,\Phi.$$

64. Cum ſit $aD.eD = \frac{ac}{cof.\,\Phi}$, atque Φ ſit angulus quem planum ſecans cum plano baſis conſtituit, hinc ſequens elegans Theorema conſequimur.

THEOREMA.

„*Si Cylindrus quicunque ſecetur plano quocunque, erit rectan-* „*gulum Axium ſectionis ad rectangulum Axium Baſis Cylindri,* „*uti ſecans anguli, quem planum ſectionis cum plano Baſis conſti-* „*tuit, ad ſinum totum*".

Quare, cum omnia parallelogramma circa Diametros conjugatas deſcripta æqualia ſint rectangulis ex Axibus formatis, etiam parallelogramma iſta circa Baſin & ſectionem quamcunque Cylindri formata eandem inter ſe tenebunt rationem.

TAB. XXXV. *Fig.* 133. 65. Natura autem hujuſmodi ſectionum obliquarum Cylindri commodius ſequenti modo definiri poterit. Si fuerit Baſis Cylindri Ellipſis $AEBF$, cujus ſemiaxes $AC = BC = a$, $EC = CF = c$, atque recta CD ad Centrum Baſis C perpendicularis Axis Cylindri: ſecetur iſte Cylindrus plano, cujus cum plano Baſis interſectio ſit recta TH ad Axem AB productum utcunque oblique poſita, ad quam ex C perpendiculum demittatur CH, ſitque angulus $GCH = \theta$. Tranſeat planum ſecans per Axis Cylindri punctum D; erit, ducta DH, angulus CHD inclinatio plani ſecantis ad planum Baſis, qui angulus vocetur $= \Phi$. Poſita ergo $CG = f$, erit

$GH =$

$GH = f.\sin.\theta$; $CH = f.\cos.\theta$; $DH = \frac{f.\cos.\theta}{\cos.\Phi}$, & $CD =$ CAP. III. $\frac{f\cos.\theta.\sin.\Phi}{\cos.\Phi}$. Hinc, ob triangulum DCG ad C rectangulum, erit $DG = \frac{f.\sqrt{(1+\sin.\theta^2\sin.\Phi^2)}}{\cos.\Phi}$, & anguli DGH sinus $= \frac{\cos.\theta}{\sqrt{(1+\sin.\theta^2.\sin.\Phi^2)}}$, cosinus $= \frac{\sin.\theta.\cos.\Phi}{\sqrt{(1+\sin.\theta^2.\sin.\Phi^2)}}$ & tangens $= \frac{\cos.\theta}{\sin.\theta.\cos.\Phi}$.

66. Jam, ex sectionis quæsitæ puncto quovis M in Basin demittatur perpendicularis MQ; ductaque Applicata QP, sit $CP = x$, $PQ = y$, erit $aacc = aayy + ccxx$. Ducatur QT ipsi CG parallela, in eamque ex G normalis GR; erit $GR = y$, & $QR = f - x$. Quoniam igitur angulus $TGR = GCH = \theta$, erit $GT = \frac{y}{\cos.\theta}$ & $TR = \frac{y.\sin.\theta}{\cos.\theta}$: unde fit $QT = f - x + \frac{y.\sin.\theta}{\cos.\theta}$. Ideoque, ob triangula CDG & QMT similia, erit $CG : DG = QT : TM$, & $CG : CG - QT = DG : DS$, ducta MS parallela GT. Hinc erit $DS = \frac{(x.\cos.\theta - y.\sin.\theta)\sqrt{(1+\sin.\theta^2.\sin.\Phi^2)}}{\cos.\theta.\cos.\Phi}$. Positis ergo $DS = t$, $MS = u$, erit $x.\cos.\theta - y.\sin.\theta = \frac{t.\cos.\theta.\cos.\Phi}{\sqrt{(1+\sin.\theta^2.\sin.\Phi^2)}}$; $y = u.\cos.\theta$; unde æquatio inter t & u reperietur, quæ adhuc erit satis complicata.

67. Quod si autem, loco Axium principalium Basis, ducatur Diameter EF intersectioni TH parallela, ad eamque Diameter conjugata AB, quæ producta ipsi TH occurrat in G. Tum vero maneant eadem, quæ ante posuimus $CG = f$; $GCH = \theta$; $CHD = \Phi$, $CA = CB = m$, $CE = CF = n$; fueritque ducta QP Diametro EF parallela, & positis $CP = x$, $PQ = y$, ut sit $m^2n^2 = m^2y^2 + n^2x^2$, erit $GT = MS = y$; & $DS = \frac{DG.x}{CG} = \frac{x\sqrt{(1+\sin\theta^2.\sin.\Phi^2)}}{\cos.\Phi}$. Quare, positis $DS = t$

 &

APPEND. & $MS = u$, fiet $x = \frac{t.\cos.\phi}{\sqrt{(1 + \sin.\theta^2.\sin\phi^2)}}$ & $y = u$, erit vero $\frac{CG}{DG}$ cofinus anguli CGD; unde, fi ponatur angulus $CGD = \eta$, erit $x = t.\cos.\eta$; ideoque pro fectione quæfita erit $mmnn = mmuu + nntt.\cos.\eta^2$, ad Diametros conjugatas, Centro exiftente in D; eritque femidiameter in directione $DS = \frac{m}{\cos.\eta}$ & alter $= n$. Anguli vero, quo hæ Diametri invicem inclinantur GSM, tangens erit $= \frac{\cos.\theta}{\sin.\theta.\cos\phi}$ & cofinus $= \frac{\sin.\theta.\cos.\phi}{\sqrt{(1 + \sin.\theta^2.\sin.\phi^2)}} = \sin.\theta\cos.\eta$. Hocque pacto natura fectionis facillime cognofcitur.

TAB. XXXV. Fig. 134. 68. Expofitis ergo fectionibus Cylindri, ad Conum progrediamur, five rectum five fcalenum: eo vero tantum Conum fcalenum a recto differre confidero, quod in fcaleno fectiones ad Axem Coni normales fint Ellipfes fua Centra in Axe Coni habentes; dum in recto hæ fectiones funt Circuli. Sit igitur $OaebfO$ Conus quicunque Verticem in O & Axem Oc habens; quem ad planum tabulæ pono normalem, ita ut tabula repræfentet planum per Coni Verticem O ductum & ad Axem Coni Oc normale. Ducantur per O in plano tabulæ rectæ AB, EF Axibus ab & ef cujufque fectionis Axi normalis parallelæ. Quod fi ergo ex fectionis $aebf$ puncto quocunque M ad planum tabulæ demittatur normalis MQ, & ex Q ad AB perpendiculum PQ; fi ponantur $OP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, erit quoque fectionis Abfciffa $cp = x$, Applicata $pM = y$: unde, cum Axes ab, ef ad $Oc = QM = z$, conftantem teneant rationem, fi ponatur $ac = bc = mz$ & $ec = fc = nz$, erit $m^2n^2zz = mmyy + nnxx$; quæ eft æquatio naturam Superficiei Conicæ exprimens, inter tres variabiles x, y & z.

69. Cum igitur omnes fectiones Axi Oc normales fint Ellipfes, uti ex æquatione $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$ (tribuendo ipfi

ipsi z valorem constantem) apparet; simili modo facile cognoscentur sectiones, quæ vel ad rectam AB vel EF erunt normales. Si enim iste Conus secetur plano ad AB normali & per punctum P transeunte, posito $OP = a$, ista pro sectione habebitur æquatio $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 a^2$; inter Coordinatas $Pp = z$, & $pM = y$; quam propterea patet esse Hyperbolam Centrum in P habentem, cujus semiaxis transversus erit $= \frac{a}{m}$, & semiaxis conjugatus $= \frac{na}{m}$. Pari modo, si y ponatur constans, sectio rectæ EF normalis intelligetur esse Hyperbola Centrum habens in ipsa recta EF. Cap. III.

70. Si planum, quo Conus secatur, sit quidem perpendiculare ad planum $AEBF$, at vero ad neutram Linearum AB, EF normale, facile quoque sectio Coni definitur. Secet enim hoc planum Basin $AEBF$ recta BE, ac vocetur $OB = a$, $OE = b$. Jam, ex puncto sectionis quovis M demittatur normalis MQ, & ex Q Applicata QP, ut sit $OP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; atque, ex natura Coni, $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2$. Erit ergo $a : b = a - x : y$, seu $y = b - \frac{bx}{a}$. Ponantur sectionis Coordinatæ $BQ = t$, & $QM = z$: erit $b : \sqrt{(aa + bb)} = y : t$; ideoque $y = \frac{bt}{\sqrt{(aa+bb)}}$, & $a - x = \frac{at}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Sit $\sqrt{(aa+bb)} = c$; erit $y = \frac{bt}{c}$; $x = a - \frac{at}{c}$, atque prodibit inter t & z sequens æquatio Tab. XXXVI. Fig. 135.

$$m^2 n^2 c^2 z^2 = m^2 b^2 tt + n^2 a^2 cc - 2nnaact + nnaatt.$$

Fiat $t - \frac{nnaac}{m^2 b^2 + n^2 a^2} = GQ = u$, existente $BG = \frac{nnaac}{m^2 b^2 + n^2 a^2}$, & erit $m^2 n^2 c^2 z^2 = (m^2 b^2 + n^2 a^2) uu + \frac{m^2 n^2 a^2 b^2 c^2}{m^2 b^2 + n^2 a^2}$.

71. Erit ergo hæc Coni sectio Hyperbola Centrum habens in

APPEND. in puncto G, cujus semiaxis transversus erit $Ga = \frac{ab}{\sqrt{(m^2b^2 + n^2a^2)}}$; & semiaxis conjugatus $= \frac{mnabc}{m^2b^2 + n^2a^2}$. Asymtotæ vero hujus Hyperbolæ, quæ Axem Ga in Centro G decussabunt, cum Axe Ga facient angulum, cujus tangens est $= \frac{mnc}{\sqrt{(m^2b^2 + n^2a^2)}}$. Quo ergo sectio fiat Hyperbola æquilatera, oportet esse $m^2n^2aa + m^2n^2b^2 = m^2b + n^2a^2$, seu $\frac{b}{a} = tang.\, OBE = \frac{n\sqrt{(mm - 1)}}{m\sqrt{(1 - nn)}}$. Nisi ergo sit $\frac{mm - 1}{1 - nn}$ major nihilo, Hyperbola æquilatera hoc modo oriri nequit. In Cono recto, quidem ubi est $m = n$, anguli, quem Asymtotæ cum Axe sectionis constituunt, tangens erit $= m$, & angulus $=$ angulo aOc.

TAB. XXXV. Fig. 134.

TAB. XXXVI. Fig. 136.

72. Sit nunc sectio obliqua, ita tamen ut ejus intersectio BT cum plano $AEBF$ sit normalis ad rectam AB. Ponatur $OB = f$, & angulus inclinationis plani ad planum Basis, seu angulus $OBC = \Phi$, ita ut hoc planum secans Axem Coni OC in puncto C trajiciat; erit $BC = \frac{f}{cos.\,\Phi}$; & $OC = \frac{f.sin.\Phi}{cos.\,\Phi}$. Ex sectionis quæsitæ puncto quovis M ad BT ducatur perpendicularis MT; tum vero ad planum Basis perpendiculum MQ: & ex Q ad OB normalis QP: ita ut, positis $OP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$, habeatur $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$. Ponantur pro sectione Coordinatæ $BT = t$, $TM = u$; erit, ob angulum $QTM = \Phi$, $QM = z = u.sin.\Phi$; $TQ = u.cos.\Phi = f - x$; unde fit $y = t$; $z = u\,sin.\Phi$; & $x = f - u.\,cos.\,\Phi$; ideoque

$$m^2n^2u^2.sin.\,\Phi^2 = m^2t^2 + n^2(f - u.\,cos.\,\Phi)^2.$$

73. Ponatur $BC = \frac{f}{cos.\,\Phi} = g$, ut fiat $f = g.\,cos.\,\Phi$, erit $x = (g - u).\,cos.\,\Phi$; atque pro sectione erit

m^2

$m^2n^2u^2.\sin.\Phi^2 = m^2t^2 + n^2g^2.\cos.\Phi^2 - 2n^2gu.\cos.\Phi^2 + n^2u^2.\cos.\Phi^2$. CAP. III.

Statuatur $u - \frac{g.\cos.\Phi^2}{\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2} = SG = s$, ducta MS parallela ipsi BT, sumtaque $BG = \frac{g.\cos.\Phi^2}{\cos\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2} = \frac{f.\cos.\Phi}{\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2} = \frac{f.\cos.\Phi}{1 - (1+m^2).\sin.\Phi^2}$; ita ut Coordinatæ sint $GS = s$ & $SM = t$, atque nascetur hæc æquatio $m^2tt + nn(\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2)ss - \frac{mmnnff\sin\Phi^2}{(\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2)} = 0$. Erit ergo Curva Sectio conica Centrum habens in G. Eritque ergo Parabola si Centrum G in infinitum abit, quod fit si $tang.\Phi = \frac{1}{m}$; seu, si recta BC fuerit lateri Coni Oa parallela. Hoc vero casu erit $mmtt + nnff - 2nnfu.\cos.\Phi = 0$: Vertex Parabolæ erit in G, sumta $BG = \frac{f}{2\cos\Phi}$; & Latus rectum erit $= \frac{2nnf.\cos.\Phi}{mm}$. TAB. XXXV. Fig. 134. TAB. XXXVI. Fig. 136.

74. Quoniam sectio est Parabola, si fuerit $\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2 = 0$; manifestum est eam fore Ellipsin, si sit $\cos.\Phi^2$ major quam $m^2.\sin.\Phi^2$, seu $tang.\Phi$ major quam $\frac{1}{m}$, quo quidem casu recta BC sursum converget cum latere Coni opposito Oa. Cum igitur sit $BG = \frac{g}{1 - m^2.tang.\Phi^2}$, erit BG major quam BC, existente G sectionis quæsitæ Centro. Erit ergo sectionis quæsitæ semiaxis in directione BC positus $= \frac{mf.\sin.\Phi}{\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2}$, alter vero semiaxis conjugatus $= \frac{nf.\sin.\Phi}{\sqrt{(\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2)}}$, & semilatus rectum $= \frac{nn}{m}f.\sin.\Phi$. Unde sectio erit Circulus, si fuerit $m = n\sqrt{(\cos.\Phi^2 - m^2.\sin.\Phi^2)}$ seu $mm = nn - nn(1+mm).\sin.\Phi$; hincque fit $\sin.\Phi = \frac{\sqrt{nn - mm)}}{n\sqrt{(1+mm)}} = \sin.OBC$, & $\cos.\Phi = \frac{m\sqrt{(1+nn)}}{n\sqrt{(1+mm)}}$. Nisi ergo sit n major quam m, nulla hujusmodi sectio esse poterit Circulus.

75. Si

APPEND. 75. Si fuerit $m^2.fin.\Phi^2$ major quam $cof.\Phi^2$, feu $tang.\Phi$ major quam $\frac{1}{m}$; ita ut recta BC cum latere Coni oppofito Oa furfum divergat, fectio erit Hyperbola, cujus femilatus transverfum erit $= \frac{mf.fin.\Phi}{-cof.\Phi^2 + m^2.fin.\Phi^2}$, & femilatus conjugatum $= \frac{nf.fin.\Phi}{\sqrt{(m^2.fin.\Phi^2 - cof.\Phi^2)}}$; ac femilatus rectum $= \frac{nn}{m}f.fin.\Phi$, & anguli, fub quo Afymtotæ Axem in Centro G decuffant, tangens erit $= \frac{n}{m}\sqrt{(m^2.fin.\Phi^2 - cof.\Phi^2)}$. Quare Hyperbola erit æquilatera fi fuerit $m^2n^2.fin.\Phi^2 - n^2.cof.\Phi^2 = m^2 = (mm+1)nn.fin.\Phi^2 - nn = mm$, feu $fin.\Phi = \frac{\sqrt{(mm+nn)}}{n\sqrt{(1+mm)}}$, & $cof.\Phi = \frac{m\sqrt{(nn-1)}}{n\sqrt{(1+mm)}}$. Ad hoc ergo neceffe eft ut fit n major unitate, alioquin Hyperbola æquilatera per fectionem hujufmodi produci nequit.

76. Si Conus eft rectus, feu $m = n$, tum omnes fectiones, ad has, quas evolvimus referri poffunt, quia pofitio rectæ AB ab arbitrio noftro pendet. At pro Cono fcaleno fupereft, ut inveftigemus fectiones quæ a plano utcunque oblique
TAB. XXXVI. Fig. 137. ad rectam AB pofito formantur. Sit igitur BR interfectio plani fecantis cum plano Bafis $AEBF$. Ponatur $OB = f$, angulus $OBR = \theta$, & angulus inclinationis fecantis ad Bafin $= \Phi$; erit, demiffo ex O in BR perpendiculo OR, $OR = f.fin.\theta$ & $BR = f.cof.\theta$. Tum, ducta in plano fecante recta RC, erit, ob angulum $ORC = \Phi$, $RC = \frac{f.fin.\theta}{cof.\Phi}$ & $OC = \frac{f.fin.\theta.fin.\Phi}{cof.\Phi}$. Si jam fectio ad Axem Coni OC normalis in planum Bafis projiciatur, erunt ejus Axes principales fecundum rectas AB & EF difpofiti, alterque erit ut m alter ut n.

77. In hac fectione projecta ducatur Diameter ef parallela ipfi BR: erit angulus $BOe = \theta$; fitque aOb pofitio Diametri

metri ejus conjugatæ. Ponatur femidiameter $Oa = \mu$, $Oe = \nu$, erit

$$\mu = \frac{\sqrt{(m^4.\,\text{fin.}\,\theta^2 + n^4.\,\text{cof.}\,\theta^2)}}{\sqrt{(m^2.\,\text{fin.}\,\theta^2 + n^2.\,\text{cof.}\,\theta^2)}}$$

&

$$\nu = \frac{mn}{\sqrt{(m^2.\,\text{fin.}\,\theta^2 + n^2.\,\text{cof.}\,\theta^2)}},$$

atque

$$\text{tang.}\ BOb = \frac{mn.\,\text{cof.}\,\theta}{mm.\,\text{fin.}\,\theta},$$

cujus anguli propterea erit

$$\text{Sinus} = \frac{nn.\,\text{cof.}\,\theta}{\sqrt{(m^4.\,\text{fin.}\,\theta^2 + n^4.\,\text{cof.}\,\theta^2)}}$$

&

$$\text{Cofinus} = \frac{mm.\,\text{fin.}\,\theta}{\sqrt{(m^4.\,\text{fin.}\,\theta^2 + n^4.\,\text{cof.}\,\theta^2)}}.$$

Jam eft angulus $ObR = \theta + BOb$: ergo

$$\text{fin.}\ ObR = \frac{m^2.\,\text{fin.}\,\theta^2 + n^2.\,\text{cof.}\,\theta^2}{\sqrt{(m^4.\,\text{fin.}\,\theta^2 + n^4.\,\text{cof.}\,\theta^2)}},$$

&

$$\text{cof.}\ ObR = \frac{(mm - nn).\,\text{fin.}\,\theta\ \text{cof.}\,\theta}{\sqrt{(m^4.\,\text{fin.}\,\theta^2 + n^4.\,\text{cof.}\,\theta^2)}}.$$

At eft

$$\mu\nu = \frac{mn.\sqrt{(m^4.\,\text{fin.}\,\theta^2 + n^4\ \text{cof.}\,\theta^2)}}{mm.\,\text{fin.}\,\theta^2 + nn.\,\text{cof.}\,\theta^2}.$$

78. Cum igitur fit $OR = f.\,\text{fin.}\,\theta$, erit

$$Ob = \frac{OR}{\text{fin.}\ ObR} = \frac{f.\,\text{fin.}\,\theta\sqrt{(m^4.\,\text{fin.}\,\theta^2 + n^4.\,\text{cof.}\,\theta^2)}}{m^2.\,\text{fin.}\,\theta^2 + n^2.\,\text{cof.}\,\theta^2}$$

&

$$Rb = \frac{(mm - nn)f.\,\text{fin.}\,\theta.\,\text{cof.}\,\theta}{m^2.\,\text{fin.}\,\theta^2 + n^2.\,\text{cof.}\,\theta^2}.$$

Hinc, ex Triangulo RbC ad R rectangulo, erit anguli CbR tangens $= \dfrac{m^2.\,\text{fin.}\,\theta^2 + n^2.\,\text{cof.}\,\theta^2}{(m^2 - n^2).\,\text{fin.}\,\theta.\,\text{cof.}\,\theta.\,\text{cof.}\,\phi}$: unde, angulus CbR erit cognitus. Jam, ex puncto fectionis quovis M ad rectam RT ducatur MT parallela ipfi Cb, atque ex M ad Cb pa-

 rallela

APPEND. rallela MS ipsi RT: vocenturque $bT = MS = t$; $bS = TM = u$; quæ, tanquam Coordinatæ obliquangulæ sectionis quæsitæ spectentur, existente anguli bSM tangente $= \frac{m^2 \; sin\, \theta^2 + n^2 \; cos.\, \theta^2}{(m^2 . - n^2)\, sin.\, \theta.\, cos.\, \theta.\, cos.\Phi}$. Patet ergo has Coordinatas fieri orthogonales in Cono recto, propterea quia fit $m = n$.

79. Ex puncto sectionis M ad planum $AEBF$ demittatur perpendiculum MQ; junctaque TQ erit parallela Diametro ab; tum ex Q ducatur ordinata QP alteri Diametro ef parallela. Atque, vocatis $OP = x$; $PQ = y$ & $QM = z$; erit, ex natura Coni

$$\mu^2 \nu^2 z^2 = \mu^2 y^2 + \nu^2 x^2.$$

Namque, si per punctum M concipiatur Coni sectio Basi parallela, erunt ejus semidiametri rectis ab & ef parallelæ μz & νz. At, cum inventa sint Trianguli rectanguli COb latera OC & Ob, erit Hypothenusa

$$Cb = \frac{f. sin.\theta \sqrt{(m^4. sin.\theta^2 + n^4. cos.\theta^2 - (m^2 - n^2)^2 sin.\theta^2. cos\,\theta^2. sin.\Phi^2)}}{(m^2. sin.\theta^2 + n^2. cos.\,\theta^2).\, cos.\Phi}$$

& ob Triangula TMQ, bCO similia, erit

$$TM(u) : TQ(Ob - x) : QM(z) = bC : Ob : OC$$

ergo $x = Ob - \frac{Ob.\, u}{Cb}$; $z = \frac{OC.\, u}{Cb}$; & $y = t$; ideoque

$$\mu^2 \nu^2 . OC^2 . u^2 = \mu^2 . Cb^2 . t^2 + \nu^2 . Ob^2 (Cb - u)^2$$

80. Æquatio hæc evoluta dabit hanc

$$= \mu^2 .\, Cb^2 .\, tt + \nu^2 (Ob^2 - \mu^2 .\, Oc^2)\, uu - 2\nu^2 .\, Ob^2 .\, Cb.u + \nu^2 .\, Ob^2 .\, Cb^2,$$

n qua si ponatur $u - \frac{Ob^2 . Cb}{Ob^2 - \mu^2 .\, Oc^2} = s$: seu, sumta $bG = \frac{Ob^2 . Cb}{Ob^2 - \mu^2 .\, Oc^2} = \frac{Cb}{1 - (m^2 . sin.\, \theta^2 + n.\, cos.\, \theta^2)\, tang.\, \Phi^2}$, & vocata

cata $GS = s$; erit G Centrum ſectionis conicæ cujus æquatio inter Coordinatas t & s erit Cap. III.

$$\mu^2\, Cb^2.tt + \nu^2(Ob^2 - \mu^2.Oc^2)ss = \frac{\mu^2\nu^2\, Ob^2.Oc^2.Cb^2}{Ob^2 - \mu^2.Oc^2},$$

cujus ſemidiameter tranſverſus erit $= \frac{\mu.Ob.Oc.Cb}{Ob^2 - \mu^2.Oc^2}$, & ſemidiameter conjugatus $= \frac{\nu.Ob.Oc}{\sqrt{(Ob^2 - \mu^2.Oc^2)}}$, & ſemilatus rectum $= \frac{\nu\nu.Ob.Oc}{\mu.Cb}$. Ceterum apparet ſi ſit *tang.* ϕ minor quam $\frac{1}{\sqrt{(m^2.\mathit{ſin}.\theta^2 + n^2.\mathit{coſ}.\theta^2)}}$, ſeu *tang.* ϕ minor quam $\frac{\nu}{mn}$, Curvam fore Ellipſin; ſi ſit *tang.* $\phi = \frac{\nu}{mn}$, Parabolam; & ſi *tang.* ϕ major quam $\frac{\nu}{mn}$, Hyperbolam.

81. Tertium Corpus, cujus ſectiones plano factas hic inveſtigare conſtituimus, eſt Globus, cujus quidem omnes ſectiones planas Circulos eſſe ex Geometria elementari conſtat. Interim tamen quo methodus clarius perſpiciatur, quemadmodum ex data æquatione pro Solido quocunque ejus ſectiones quævis erui debeant, idem negotium hic analytice abſolvam quod vulgo ſynthetice tradi ſolet. Sit igitur C Centrum Globi, per quod planum tabulæ tranſire concipiatur, ita ut ſectio hoc plano facta ſit Circulus maximus, cujus radius $CA = CB$; ponatur $= a$, qui ſimul erit radius Globi. Sit porro recta DT interſectio plani ſecantis cum iſto plano tabulæ, ad quam ex C ducatur normalis CD, quæ ſit $= f$, angulus autem inclinationis ſit $= \phi$. Tab. XXXVII. *Fig.* 138.

82. Sit M punctum ſectionis quæſitæ quodcunque; unde ad planum tabulæ demittatur perpendiculum MQ hincque ad rectam CD pro Axe aſſumtam perpendicularis QP. Quod ſi jam vocentur Coordinatæ $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; erit, ex natura Globi, $xx + yy + zz = aa$. Ducatur ex M pariter ad rectam DT normalis MT; & juncta QT, ob ambas QT & MT ad DT normales, metietur angulus MTQ

APPEND. inclinationem plani ſecantis ad planum Baſis, quæ eſt $= \phi$. Quare ſi DT & MT tanquam Coordinatæ ſectionis quæſitæ ſpectentur, vocenturque $DT = t$, $TM = u$, fiet $MQ = u.\sin.\phi$, & $TQ = u.\cos.\phi$. Erit ergo $CP = x = f - u.\cos.\phi$; $PQ = y = t$; & $QM = z = u.\sin.\phi$. Quibus valoribus ſubſtitutis emerget æquatio pro ſectione Globi quæſita hæc

$$ff - 2fu.\cos.\phi + uu + tt = aa.$$

83. Perſpicuum jam eſt hanc æquationem eſſe pro Circulo. Namque ſi ponatur $u - f.\cos.\phi = s$, fiet

$$ff.\sin.\phi^2 + ss + tt = aa.$$

unde radius ſectionis erit $= \sqrt{(aa - ff.\sin.\phi^2)}$. Quare, ſi ex D Applicatæ TM parallela ducatur Dc, in eamque ex Centro C perpendiculum demittatur Cc, ob $CD = f$ & angulum $CDc = \phi$, erit $Dc = f\cos.\phi$ & $Cc = f.\sin.\phi$. Hinc, cum Coordinatæ s & t ad Centrum referantur, erit punctum c Centrum ſectionis, & $\sqrt{(CB^2 - Cc^2)}$ radius iſtius Circuli, uti ex Elementis eſt manifeſtum. Simili autem modo omnium aliorum Solidorum, dummodo eorum natura ſit æquatione inter tres variabiles expreſſa, ſectiones quæcunque planis factæ inveſtigari poterunt.

TAB. XXXVII. Fig. 139. 84. Quo tamen tota operatio melius perſpiciatur, proponatur Solidum quodcunque, cujus natura ſit expreſſa æquatione inter ternas Coordinatas $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; quarum illæ poſitæ ſint in plano tabulæ hæc vero z ſit ad planum normalis. Secetur jam hoc Solidum plano quocunque, cujus cum plano tabulæ interſectio ſit recta DT, & inclinationis angulus $= \phi$. Ponatur recta $AD = f$, angulus $ADE = \theta$; eritque, demiſſo ex A in DE perpendiculo AE, $AE = f.\sin.\theta$ & $DE = f.\cos.\theta$. Tum, ex ſectionis quæſitæ puncto M ad DT ducatur perpendicularis MT; junctaque QT, æquabitur angulus MTQ inclinationi datæ ϕ. Quare, ſi

ſi DT & TM pro Coordinatis ſectionis quæſitæ accipiantur, Cap. III.
& vocentur $DT = t$, $TM = u$, erit $QM = u.\,\text{ſin.}\,\Phi$, &
$TQ = u.\,\text{coſ.}\,\Phi$.

85. Ex T ad Axem AD demittatur perpendiculum TV; atque, ob angulum $TDV = \theta$, erit $TV = t.\,\text{ſin.}\,\theta$ & $DV = t.\,\text{coſ.}\,\theta$. Quia porro angulus TQP eſt $= \theta$, erit $PV = u.\,\text{ſin}\,\theta.\,\text{coſ.}\,\Phi$ & $PQ - TV = u.\,\text{coſ.}\,\theta.\,\text{coſ.}\,\Phi$. Ex his itaque Coordinatæ x, y, & z ſequenti modo per t & u definientur ut ſit

$$AP = x = f + t.\,\text{coſ.}\,\theta - u.\,\text{ſin.}\,\theta.\,\text{coſ.}\,\Phi$$

&

$$PQ = y = t.\,\text{ſin.}\,\theta + u.\,\text{coſ.}\,\theta.\,\text{coſ.}\,\Phi$$

atque

$$QM = z = u.\,\text{ſin.}\,\Phi.$$

Quare, ſi iſti valores in æquatione inter x, y, & z pro Solido data ſubſtituantur, obtinebitur æquatio inter t & u, ſeu Coordinatas ſectionis quæſitæ, cujus adeo natura innoteſcet. Convenit autem hic modus fere cum eo, quo ſupra §. 50. uſi ſumus.

CAPUT IV.

De immutatione Coordinatarum.

86. Quemadmodum æquationes pro Lineis curvis in eodem plano ſitis in innumerabiles formas diverſas transformari poſſunt, immutandis cum Abſciſſarum initio, tum Axis poſitione, tum utroque: ita in præſenti negotio multo adhuc major varietas locum habet. Primum enim in eodem plano, in quo binæ Coordinatæ ſunt ſitæ, hæ infinitis modis variari poſſunt. Deinde vero hoc ipſum planum, quod duas

APPEND. continet Coordinatas mutari, ſicque prior varietas in infinitum augeri poterit. Data ſcilicet æquatione inter tres Coordinatas inter ſe normales, perpetuo inveniri poteſt alia æquatio inter tres quaſcunque alias Coordinatas pariter inter ſe normales, quarum poſitio reſpectu priorum infinities magis variari poteſt, quam ſi duæ tantum eſſent Coordinatæ, uti uſu venit in æquationibus Linearum curvarum.

87. Ponamus primum ſolum Abſciſſarum x initium in Axe mutari, ita ut binæ reliquæ Coordinatæ y & z maneant eædem; atque nova Abſciſſa quantitate conſtante ab x diſcrepabit. Sit igitur nova Abſciſſa $= t$, erit $x = t \pm a$ quo valore in æquatione pro Superficie ſubſtituto prodibit æquatio inter tres Coordinatas t, y & z quæ, etſi a priori diverſa, tamen pro eadem erit Superficie. Simili modo reliquæ Coordinatæ y & z quantitatibus conſtantibus augeri minuive poterunt: atque, ſi ponatur $x = t + a$; $y = u \pm b$ & $z = v \pm c$, orietur æquatio inter tres variabiles t, u, & v pro eadem Superficie: atque adeo hæ novæ Coordinatæ prioribus erunt parallelæ. Interim hoc modo æquatio pro Superficie, etſi eſt magis generalis, tamen non multum variatur.

TAB. XXXVII. Fig. 140. 88. Quoniam tres Coordinatæ orthogonales, quarum æquatio naturam Superficiei exprimit, ad tria plana inter ſe normalia referuntur, ponamus planum unum in quo binæ Coordinatarum x & y capiuntur, invariatum manere, in eo autem Lineam quamcunque aliam CT, præter AP, pro Axe aſſumi. Cum igitur priores Coordinatæ pro Axe AP eſſent $AP = x$, $P = y$, $QM = z$, pro novo Axe CQ manebit Coordinata $QM = z$ eadem, at binæ reliquæ evadent $CT = t$, $TQ = u$, ducta QT ad novum Axem CT normali. Ad æquationem igitur inter has novas Coordinatas t, u & z inveniendam, ducatur CR parallela priori Axi AP, tum ex C ad eum perpendicularis ducatur CB, ac vocetur $AB = a$, $BC = b$; & angulus $RCT = \zeta$. Denique ducatur TR normalis ad CR & ex T in QP productam perpendiculum TS.

89. His

89. His factis; in Triangulo TCR erit $TR = t.\,sin.\,\zeta$, $CR = t.\,cos.\,\zeta$: in Triangulo autem QTS, cujus angulus ad Q pariter erit $= \zeta$, fiet $TS = u.\,sin.\,\zeta$, & $QS = u.\,cos.\,\zeta$. Ex his jam obtinebitur $AP = x = CR + TS - AB = t.\,cos.\,\zeta + u.\,sin.\,\zeta - a$; & $QP = QS - TR - BC = y = u.\,cos.\,\zeta - t.\,sin.\,\zeta - b$. Quod si ergo isti valores loco x & y in æquatione pro Superficie proposita substituantur, resultabit æquatio inter ternas novas Coordinatas t, u & z, qua ejusdem Superficiei natura exprimetur. Hæc igitur nova æquatio multo latius patentem speciem præ se feret, cum in eam ingrediantur tres novæ constantes arbitrariæ a, b & angulus ζ, quæ in priori æquatione non inerant. Hæcque erit æquatio generalis: quando quidem idem planum, in quo binæ Coordinatæ x & y versantur, retineatur. CAP. IV.

90. Varietur nunc quoque planum, in quo binæ priores Coordinatæ x & y erant assumtæ: ac primo quidem ita ut intersectio novi plani cum priori APQ incidat in ipsam rectam AP, quæ etiam pro novis Coordinatis tanquam Axis spectetur. Sit igitur APT hoc novum planum, cujus ad prius APQ inclinatio erit angulus QPT, qui ponatur η. Ex M in PT ducatur normalis MT, quæ simul in novum planum erit perpendicularis & vicem tertiæ Coordinatæ tenebit. Ponantur ergo tres novæ Coordinatæ $AP = x$, $PT = u$, & $TM = v$: &, ducta TR ad PQ, & TS ad QM normali, erit $TR = u.\,sin.\,\eta$, $PR = u.\,cos.\,\eta$; $TS = v.\,sin.\,\eta$ & $MS = v.\,cos.\,\eta$. Hinc erit $PQ = y = u.\,cos.\,\eta - v.\,sin.\,\eta$ & $QM = z = v.\,cos.\,\eta + u.\,sin.\,\eta$, qui valores, in æquatione proposita pro y & z substituti, dabunt æquationem inter tres novas Coordinatas x, u & v, qua ejusdem Superficiei natura exprimetur. TAB. XXXVII. Fig. 141.

91. Cadat nunc intersectio novi plani secantis cum plano APQ in Lineam quamcunque CT, sitque η inclinatio istorum planorum; ac sumatur recta hæc CT pro Axe in hoc plano. Quæratur primum æquatio inter Coordinatas in plano APQ ad Axem CT relatas, quæ ex præcedentibus ita reperietur, TAB. XXXVII. Fig. 140.

APPEND. perietur, ut, positis $AB = a$, $BC = b$, angulo $TCR = \zeta$, & Coordinatis $CT = p$, $TQ = q$, & $QM = r$, ut sit $x = p.cos.\zeta + q.sin.\zeta - a$; $y = q.cos.\zeta - p.sin.\zeta - b$, & $z = r$. Nunc vero ex §. præcedente, positis novis Coordinatis t, u, & v, fiet $p = t$; $q = u.cos.\eta - v.sin.\eta$, & $r = v.cos.\eta + u.sin.\eta$. His substitutis, Coordinatæ principales x, y, z ex novis ita determinabuntur ut sit

$$x = t.cos.\zeta + u.sin.\zeta.cos.\eta - v.sin.\zeta.sin.\eta - a$$
&
$$y = - t.sin.\zeta + u.cos.\zeta.cos.\eta - v.cos.\zeta.sin.\eta - b$$
atque
$$z = u.sin.\eta + v.cos.\eta.$$

TAB. XXXVII. Fig. 140. 92. Sumatur jam in plano isto novo, in quo Coordinatæ t & u sunt sitæ, alia Linea quæcunque pro Axe; sicque orietur æquatio generalissima pro Superficie proposita. Sint in hunc finem AP, PQ, QM Coordinatæ t, u, & v, quas modo invenimus; ita ut AP repræsentet intersectionem memorati plani cum plano in quo principales Coordinatæ x & y positæ concipiuntur. Sitque recta CT novus Axis ad quem novæ generalissimæ Coordinatæ, quas quærimus, referantur, quæ vocentur, $CT = p$, $TQ = q$, & $QM = r$. Præterea, sunt AB & BC Lineæ constantes, angulus autem CTR ponatur $= \theta$. His positis erit ex §. 89.

$$t = p.cos.\theta + q.sin.\theta - AB$$
&
$$u = - p.sin.\theta + q.cos.\theta - BC$$
atque
$$v = r.$$

Qui valores si substituantur in expressionibus §. præcedentis reperietur

$x =$

$$x = p(\cos.\zeta.\cos.\theta - \sin.\zeta.\cos.\eta.\sin.\theta) + q(\cos.\zeta.\sin.\theta + \sin.\zeta.\cos.\eta.\cos.\theta) - r.\sin.\zeta.\sin.\eta + f$$ Cap. IV.

&

$$y = -p(\sin.\zeta.\cos.\theta + \cos.\zeta.\cos.\eta.\sin.\theta) - q.(\sin.\zeta.\sin.\theta - \cos.\zeta.\cos.\eta.\cos.\theta) - r.\cos.\zeta.\sin.\eta + g$$

atque

$$z = -p.\sin.\eta.\sin.\theta + q.\sin.\eta.\cos.\theta + r.\cos.\eta + h,$$

ubi f, g & h ſunt Lineæ conſtantes ex compoſitione earum, quæ in calculum ſunt introductæ, ortæ.

93. Patet ergo æquationem generaliſſimam pro quavis Superficie ſex conſtantes arbitrarias complecti, quæ utcunque determinentur, æquatio perpetuo ejuſdem Superficiei naturam exprimet. Quantumvis autem ſimplex & ſuccincta fuerit æquatio pro Superficie inter Coordinatas x, y, z, ſi ex ea conflectur æquatio generaliſſima inter p, q, & r, ea ob ingentem conſtantium arbitrariarum numerum neceſſario fiet maxime intricata: præſertim, ſi altiores dimenſiones ipſarum x, y, & z affuerint. Vix igitur dari poterit caſus, in quo conveniret ad æquationem generaliſſimam aſſurgere. Quanquam enim ea utilitas inde percipi poſſet, ut idoneo modo conſtantibus illis definiendis æquatio ſimpliciſſima redderetur; tamen, ob calculi prolixitatem, hic labor plerumque fieret moleſtiſſimus. Interim tamen in ſequentibus iſta methodus æquationes generaliſſimas formandi uſu non carebit, quoniam inde egregiæ proprietates elicientur ac demonſtrabuntur.

94. Quamquam autem æquatio generaliſſima plerumque ſit maxime complicata; tamen, ſi ad dimenſiones, quas Coordinatæ junctim ſumtæ conſtituunt, ſpectemus, earum numerus perpetuo æqualis eſt numero dimenſionum, quas primæ Coordinatæ x, y & z confecerunt. Sic, cum æquatio pro Sphæra $xx + yy + zz = aa$ ſit duarum dimenſionum, æquatio quoque generaliſſima non plures quoque quam duas continebit dimenſiones Coordinatarum p, q, & r. Hinc numerus dimenſionum, quas Coordinatæ in æquatione cujuſpiam Superficiei

Append.

constituunt, nobis suppeditat essentialem characterem naturæ istius Superficiei; propterea quod, utcunque positio Coordinatarum varietur, perpetuo tamen idem dimensionum numerus emergit. Similis scilicet hic ratio circa Superficies observatur, quam supra in Lineis curvis deprehendimus; unde eas in certos ordines divisimus. Eodem ergo modo conveniet Superficies secundum dimensiones Coordinatarum in ordines disponere: eritque nobis Superficies ordinis primi, cujus æquatio unicam tantum dimensionem complectitur: ad ordinem secundum Superficiem referemus, in cujus æquatione Coordinatæ ad duas dimensiones assurgunt; atque ita porro ex dimensionum numero sequentes ordines constituentur.

95. Si jam cum his conferantur ea, quæ supra de inventione sectionum planarum cujusque Superficiei tradita sunt, ordinem sectionum perpetuo cum ordine ad quem Superficies pertinet, congruere deprehendemus. Sit enim æquatio pro Superficie quacunque proposita inter Coordinatas x, y, & z, ad ordinem n pertinens, sectionis autem ejus cujusvis Coordinatæ normales sint t & u. Atque supra, §. 85, vidimus æquationem inter t & u inveniri, si in æquatione pro Superficie sequentes valores substituantur

$$x = f + t.\cos.\theta - u.\sin.\theta.\cos.\Phi$$

&

$$y = t.\sin.\theta + u.\cos.\theta.\cos.\Phi$$

atque

$$z = u.\sin.\Phi.$$

Manifestum igitur est æquationem pro sectione plures dimensiones assequi non posse, quam habebat æquatio inter x, y, & z; sed perpetuo totidem prodituras esse dimensiones.

96. Superficies ergo primi ordinis alias sectiones a plano factas habere nequit præter Lineas primi ordinis, seu rectas. Deinde, ex sectione Superficiei secundi ordinis aliæ Lineæ non oriuntur nisi secundi ordinis, seu Sectiones conicæ; est enim

enim Superficies conica quoque ſecundi ordinis, cum ejus æquatio ſit Cap. IV.

$$zz = \alpha xx + \beta yy.$$

Simili modo, ex Superficie tertii ordinis per ſectiones planas prodibunt Lineæ tertii ordinis, atque ita porro. Fieri tamen quandoque poteſt, ut æquatio pro ſectione quapiam diviſores admittat; quo caſu ſectio erit compoſita ex duabus pluribuſve Lineis inferiorum ordinum. Sic, ſectio Coni per Verticem facta conſtabit ex duabus Lineis rectis, quæ tamen conjunctim Lineam ſecundi ordinis mentiuntur, uti ſupra annotavimus.

97. Conſtitutis igitur Superficierum ordinibus, inveſtigemus præ reliquis eas Superficies, quæ ad ordinem primum pertinent. Æquatio ergo earum naturam exprimens erit $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$, cujus cum omnes ſectiones plano factæ ſint Lineæ rectæ, perſpicuum eſt has Superficies non planas eſſe non poſſe: ſi enim haberent convexitatem vel concavitatem, neceſſario daretur ſectio curvilinea. Quanquam enim in reliquis ordinibus dantur ejuſmodi Superficies, quarum certæ quædam ſectiones ſunt Lineæ rectæ, (uti in Cylindro, Cono, aliiſque, uſu venire vidimus,) tamen in iis ſectiones curvilineæ non excluduntur. Similis ſcilicet hic occurrit ratio, qualem in Lineis obſervavimus: quemadmodum enim Linea, quæ a Linea recta in pluribus uno punctis nullo modo ſecari poteſt, eſt neceſſario recta; ita Superficies quæ a plano ſecta ſemper dat Lineam rectam, neceſſario ipſa plana eſſe colligitur.

98. Ex æquatione autem generaliſſima iſta indoles clariſſime poteſt demonſtrari. Formetur enim ex æquatione $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ æquatio generaliſſima inter Coordinatas p, q, & r, ſecundum §. 92. Et, quoniam ſex novæ conſtantes arbitrariæ inducuntur, nil obſtat, quo minus eæ ita determinentur, ut binarum Coordinatarum p, & q coëfficientes evaneſcant, atque hujuſmodi æquatio $r = f$ remaneat, ejuſdem Superficiei naram exprimens. Hæc autem æquatio $r = f$ oſtendet Superficiem propoſitam eſſe plano, in quo binæ Coordinatæ p & q

 exiſtunt,

APPEND. existunt, parallelam; ideoque ipsam planam: Effici quoque potest, ut fiat $r = 0$; sicque evidens erit, ipsum planum, in quo p & q assumuntur, esse Superficiem quæsitam.

TAB. XXXVIII. Fig. 142. 99. Cum igitur constet Superficiem æquatione $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ expressam esse planam, opus est ut ejus positionem respectu plani, in quo Coordinatæ x & y assumuntur, definiamus. Sit igitur M punctum quodcunque hujus Superficiei; atque tres Coordinatæ $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$. Ponatur primum $z = 0$, atque orietur æquatio $\alpha x + \beta y = a$, quæ exprimet intersectionem Superficiei quæsitæ cum plano APQ, quam patet esse Lineam rectam BCR, cujus positio respectu Axis AP talis erit, ut sit recta AB ad Axem AP in plano APQ normalis $= \frac{a}{\beta}$, & $AC = \frac{a}{\alpha}$: unde anguli ACB tangens erit $= \frac{\alpha}{\beta}$: ideoque sinus $= \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}$, & cosinus $= \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}$. Tum, producatur QP usque ad occursum rectæ BC in R: atque, ob $CP = x - \frac{a}{\alpha}$, erit $CR = \frac{x\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\beta} - \frac{a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^3)}}{\alpha\beta}$; & $PR = \frac{\alpha x}{\beta} - \frac{a}{\beta}$.

100. Demittatur ex Q ad BC normalis QS: junctaque MS, patebit angulum MSQ metiri inclinationem Superficiei propositæ ad planum APQ. Cum igitur sit $PR = \frac{\alpha x - a}{\beta}$, erit $QR = \frac{\alpha x + \beta y - a}{\beta} = \frac{-\gamma z}{\beta}$: &, ob angulum $RQS = ACB$, erit $QS = \frac{-\gamma z}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}$: unde fit anguli QSM tangens $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\gamma}$; & propterea cosinus $= \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$. Superficies ergo quæsita ad planum, in quo versantur x & y, inclinatur angulo, cujus tangens est $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\gamma}$:

pari

pari vero modo eadem Superficies ad planum Coordinatarum x & z inclinabitur angulo cujus tangens eſt $= \frac{-\surd(\alpha^2+\gamma^2)}{\beta}$, atque ad planum Coordinatarum y & z angulo cujus tangens eſt $= \frac{-\surd(\beta^2+\gamma^2)}{\alpha}$.

CAPUT V.

De Superficiebus ſecundi ordinis.

101. Conſtitutis ergo Superficierum ordinibus ſecundum numerum dimenſionum, quas ſummæ trium Coordinatarum x, y, z poteſtates in æquatione junctim ſumtæ adimplent; ſi proponatur pro Superficie æquatio algebraïca, ſtatim aſſignari poteſt ordo, ad quem illa Superficies referri debet. Cum igitur omnis Superficies primi ordinis oſtenſa ſit eſſe plana, in hoc Capite Superficies ſecundi ordinis examini ſubjiciam. In iis autem major ſtatim deprehenditur diverſitas, quam in Lineis ſecundi gradus, quod quidem cuique attendenti facile patebit. Operam igitur dabo ut hæc diverſa genera diſtincte exponam. In ordinibus vero altioribus tantopere multitudo generum increſcit, ut ab iis evolvendis prorſus abſtinere debeamus.

102. Quoniam natura Superficierum ſecundi ordinis exprimitur æquatione, in qua variabiles x, y & z ad duas dimenſiones aſſurgunt, Cylindrus & Conus, tam rectus quam ſcalenus, & Globus, quorum proprietates jam decripſimus, in hoc ſecundo ordine continentur. Omnes vero Superficies ad hunc ordinem pertinentes comprehenduntur in hac æquatione generali

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \varkappa = 0.$$

Utcunque enim tres Coordinatæ accipiantur, æquatio ſemper in

APPEND. in hac forma continebitur. Varia ergo Superficierum huc pertinentium genera a diversa coëfficientium relatione mutua pendebunt, qui, etsi eadem Superficies infinitis æquationibus exprimatur, tamen infinitam variarum Superficierum multitudinem suppeditabunt.

103. Quemadmodum in Lineis curvis planis præcipuam divisionem inde desumsimus, quod vel in infinitum extendantur, vel in spatio finito includantur; ita simili modo omnes Superficies ad quemcunque ordinem pertinentes in duas classes dividentur; ad quarum alteram referemus eas, quæ in infinitum abeunt, ad alteram vero, quæ in spatio finito continentur. Ita Cylindrus & Conus priori classi; Globus vero posteriori annumerabitur. Posterioris quidem classis nulla dabitur Superficies in ordinibus imparibus: cum enim quælibet Superficies imparis ordinis habeat sectiones planas ejusdem ordinis, curvæ autem imparium ordinum omnes in infinitum extendantur, necesse est, ut etiam ipsæ Superficies istorum ordinum in infinitum porrigantur.

104. Quoties autem quæpiam Superficies in infinitum extenditur, necesse est ut, ad minimum, una trium variabilium x, y & z, in infinitum abeat. Quare, cum perinde sit quænam hoc casu infinita fieri assumatur, ponamus z fieri infinitam, si quidem Superficies in infinitum porrigatur. Naturam ergo hujus partis in infinitum abeuntis investigaturi ponamus esse $z = \infty$: atque nunc potissimum spectari debet terminus primus αzz, utrum is adsit an vero deficiat. Adsit ergo primum iste terminus in æquatione: atque præ eo termini ηz & $\varkappa$ evanescent, habebiturque pro parte in infinitum excurrente hæc æquatio

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \theta y + \iota x = 0,$$

ex qua porro omnes termini, qui non sunt infiniti, vel infinities minores saltem quam αzz, evanescunt.

105. Statuamus omnes terminos, in quibus variabiles duas tenent

tenent dimenſiones adeſſe; quæcunque enim fuerit Superficies, in ejus æquatione generaliſſima ſemper omnes inerunt termini ſummarum dimenſionum, neque idcirco hypotheſis, qua omnes terminos duarum dimenſionum adeſſe ponimus, univerſalitati ſolutionis ullam vim infert. Quando autem termini yz & xz adſunt, præ iis termini θy & ιx evaneſcunt; relinqueturque hæc æquatio

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0,$$

ex qua elicitur

$$z = \frac{-\beta v - vx \pm \sqrt{((\beta\beta - 4\alpha\delta)yy + (2\beta\gamma - 4\alpha\varepsilon)xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)xx)}}{\alpha}.$$

Hac igitur æquatione natura portionis in infinitum extenſæ exprimitur.

106. Si quam igitur Superficies habeat portionem in infinitum extenſam, ea congruet cum portione infinita Superficiei, quæ exprimitur hac æquatione

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0,$$

ita ut hæc Superficies ſit quaſi Aſymtota illius Superficiei æquatione generali expreſſæ. Quia vero in hac æquatione tres variabiles ubique duas habent dimenſiones, erit ea pro Superficie conica, Verticem in initio Coordinatarum, ubi omnes ſimul evaneſcunt, habente: ſemper ergo exhiberi poteſt Superficies conica, quæ erit Aſymtota Superficiei propoſitæ, ſi quidem in infinitum extenditur; ſeu cujus portio infinita cum Superficie propoſita vel penitus congruit, vel intervallo tantum finito ab eo eſt remota. Uti ergo ramos Curvarum in infinitum abeuntes per Lineas rectas Aſymtotas diſtinximus, ita Superficierum partes in infinitum extenſas per Superficies conicas Aſymtotas diſtinguere licebit.

107. Quoties ergo Superficies Aſymtota conica erit realis, toties Superficies ipſa in infinitum extenditur; atque ita quidem

dem ut utriuſque partes infinitæ congruant; ſicque ex natura Superficiei Aſymtotæ natura ipſius Superficies propoſitæ colligi poterit. Quod ſi autem Superficies Aſymtota fiat imaginaria, ipſa Superficies nullam habebit partem in infinitum extenſam, ſed tota ſpatio finito includetur. Ad Superficies ergo ſecundi ordinis, quæ in ſpatio finito contineantur, indagandas, tantum opus eſt, ut videamus quibus in caſibus æquatio pro Superficie Aſymtota fiat imaginaria; quod fit, ſi tota Superficies hæc in punctum unicum evaneſcit. Namque ſi ullam extenſionem haberet, vel punctum extra Verticem ſitum, neceſſario in infinitum expandi deberet, propterea quod ſupra oſtendimus, totam rectam quæ per verticem & unum Superficiei punctum ducitur, in ipſa Superficie eſſe poſitum.

108. Quando ergo Superficies conica Aſymtota, hac æquatione expreſſa

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0,$$

in unicum punctum abit, omnes ejus ſectiones per Verticem factæ pariter in idem punctum evaneſcere debent. Primum ergo, facto $z = 0$, æquatio $\delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0$, debet eſſe impoſſibilis, niſi ſit $x = 0$ & $y = 0$, quod evenit ſi fuerit $4\delta\zeta$ major quam $\varepsilon\varepsilon$. Deinde idem evenire debet poſito vel $x = 0$ vel $y = 0$: erit ergo $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$, & $4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$. Niſi ergo in æquatione pro Superficie ſecundi ordinis

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

fuerit $4\delta\zeta$ major quam $\varepsilon\varepsilon$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; $4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$, Superficies certo habebit partes in infinitum extenſas.

109. Neque vero hæ tres conditiones ſufficiunt ad Superficiem in ſpatium finitum includendam: requiritur inſuper ut valor ipſius z ex æquatione Aſymtotica ſupra erutus fiat imaginarius; quod fit ſi iſta expreſſio

$$(\beta\beta - 4\alpha\delta)yy + 2(\beta\gamma - 2\alpha\varepsilon)xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)xx$$ CAP. V.

perpetuo obtineat valorem negativum, ſi quidem pro utraque variabili x & y valores quicunque præter o ſubſtituantur. Quod, cum $\beta\beta - 4\alpha\delta$ & $\gamma\gamma - 4\alpha\zeta$ ſint quantitates negativæ, fiet ſi $(\beta\gamma - 2\alpha\varepsilon)^2$ minor quam $(\beta\beta - 4\alpha\delta)(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)$; hoc eſt, ſi fuerit $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ minor quam $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$; ſi quidem α habuerit valorem affirmativum, quoniam illam æquationem per α diviſimus. Quod ſi vero α habeat valorem affirmativum, ob ſuperiores æquationes $4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; & $4\delta\zeta$ major quam $\varepsilon\varepsilon$; coëfficientes δ & ζ erunt affirmativi.

110. Superficies ergo ſecundi ordinis in ſpatio finito continebitur, ſi in ejus æquatione quatuor ſequentes conditiones locum habeant; nempe ſi ſit

$4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; $4\delta\zeta$ major quam $\varepsilon\varepsilon$
&
$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ minor quam $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$.

Hincque genus primum Superficierum ſecundi ordinis definimus, ad quod eæ ſpecies omnes pertinent, quæ non in infinitum excurrunt, ſed in ſpatio finito includuntur. Ad hoc ergo genus pertinet Globus, cujus æquatio eſt

$$zz + yy + xx = aa,$$

cum enim hic ſit $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $\zeta = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0$, quatuor inventis conditionibus omnibus ſatisfit. Generalius vero hic pertinebit æquatio iſta

$$\alpha zz + \delta yy + \zeta xx = aa$$

quæ ſi α, δ, ζ, fuerint quantitates affirmativæ, ſemper eſt pro Superficie clauſa, niſi unus duove coëfficientes evaneſcant.

111. Perſpectis his quatuor conditionibus, quibus Superficies

 in

APPEND. in ſpatium finitum redigitur; ſi proponatur æquatio ſecundi ordinis quæcunque determinata, ſtatim dijudicari poterit utrum Superficies ea æquatione expreſſa habeat partes in infinitum extenſas, an nullas. Quod ſi enim unica illarum quatuor conditionum deſit, Superficies certo in infinitum extenditur. Hoc autem caſu nonnullæ ſubdiviſiones ſunt faciendæ, quibus ſingularis varietas partibus in infinitum extenſis inducitur. Prima ſubdiviſio ergo conſtituatur, ſi fuerit

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 \text{ major quam } \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$$

quo caſu Superficies in infinitum extendetur, atque Superficiem conicam pro Aſymtota habebit, uti jam ante oſtendimus. Hicque caſus e Diametro eſt oppoſitus præcedenti, quo tota Superficies in ſpatio finito continetur.

112. Præterea autem dantur caſus quidam intermedii, quibus, etſi Superficies in infinitum abit, ſimili tamen modo inter duos præcedentes locum tenet quo Parabola inter Ellipſin & Hyperbolam continetur. Caſus iſte oritur ſi fuerit

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta,$$

eritque propterea

$$\alpha z = -\beta y - \gamma x + y\surd(\beta\beta - 4\alpha\delta) + x\surd(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta).$$

Habebit ergo æquatio Aſymtotica

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0,$$

duos Factores ſimplices, qui erunt vel reales, vel imaginarii, vel inter ſe æquales. Triplex iſta diverſitas ergo tria genera Superficierum in infinitum extenſarum præbet, ſicque omnino quinque genera Superficierum ſecundi ordinis ſumus adepti, quæ nunc diligentius proſequemur.

113. Quia, mutando poſitionem ternorum Axium, quibus Coordinatæ ſunt parallelæ, æquatio generalis ad formam ſimpliciorem

pliciorem reduci poteſt, iſta reductione ita utamur, ut æquationem generalem pro Superficiebus ſecundi ordinis ad formam ſimpliciſſimam redigamus, quæ tamen omnes ſpecies æque ac generalis in ſe complectatur. Cum igitur æquatio generalis pro Superficiebus ſecundi ordinis ſit Cap.V.

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \varkappa = 0,$$

quæramus æquationem inter alias ternas Coordinatas p, q & r, quæ quidem ſe mutuo in eodem puncto, quo ternæ priores ſe decuſſent. Ad hoc ex §. 92. ſtatuatur

$$x = p(\cos. k. \cos. m - \sin. k. \sin. m. \cos. n) + q(\cos. k. \sin. m + \sin. k. \cos. m. \cos. n) - r. \sin. k. \sin. n$$

&

$$y = -p(\sin. k. \cos. m + \cos. k. \sin. m. \cos. n) - q(\sin. k. \sin. m - \cos. k. \cos. m. \cos. n) - r. \cos. k. \sin. n$$

atque

$$z = -p. \sin. m. \sin. n + q. \cos. m. \sin. n + r. \cos. n,$$

unde reſultet iſta æquatio

$$App + Bqq + Crr + Dpq + Epr + Fqr + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

114. Jam anguli illi arbitrarii k, m, & n ita definiri poterunt, ut tres coëfficientes D, E, & F evaneſcant. Quanquam enim calculus nimis ſit prolixus, quam ut angulorum illorum determinatio actu oſtendi poſſit; tamen ſi quis forte dubitet, an ſemper iſta eliminatio ad valores reales angulorum illorum perducat, is certe concedere debebit, duos ſaltem coëfficientes D & E nihilo æquales reddi poſſe. Hoc autem ſi fuerit effectum, poſitio tertii Axis, cui Ordinatæ r ſunt parallelæ in plano ad Ordinatas p normali, facile ita mutari poteſt, ut etiam coëfficiens F evaneſcat. Statuatur enim $q = t \sin. i + u \cos. i$ & $r = t. \cos. i - u. \sin. i$, ita ut, loco termini qr, novus terminus tu ingrediatur, cujus coëfficiens ope an-

 guli

APPEND. guli i nihilo æqualis fieri poterit. Hoc igitur modo æquatio generalis pro Superficiebus ſecundi ordinis ad hanc formam perducetur

$$App + Bqq + Crr + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

115. Nunc præterea Coordinatæ p, q, r datis quantitatibus ita augeri diminuive poterunt, ut coëfficientes G, H & I evaneſcant; quod fiet mutato tantum puncto illo, unde omnes Coordinatæ initium habent. Atque hoc modo omnes Superficies ſecundi ordinis in hac æquatione continebuntur

$$App + Bqq + Crr + K = 0,$$

ex qua intelligitur unumquodque trium planorum principalium per initium Coordinatarum ductorum Superficiem in duas partes ſimiles & æquales biſecare. Omnis ergo Superficies ſecundi ordinis non ſolum unum habet planum diametrale, ſed adeo tria, quæ ſe mutuo in eodem puncto normaliter interſecent; quod punctum propterea Centrum Superficiei conſtituet, etiamſi in nonnullis caſibus hoc Centrum in infinitum diſtet. Simili ſcilicet modo, quo omnes Sectiones conicæ Centro dicuntur præditæ, etiamſi in Parabola Centrum a Vertice infinite removeatur.

116. Perducta ergo æquatione, qua omnes Superficies ſecundi ordinis continentur, ad formam ſimpliciſſimam, primum harum Superficierum genus exhibebit iſta æquatio

$$App + Bqq + Crr = aa,$$

ſi quidem omnes tres coëfficientes A, B, & C valores obtineant affirmativos. Superficies igitur ad hoc primum genus per-

TAB. XXXVIII. Fig. 143. tinentes non ſolum totæ in finito ſpatio includentur, ſed omnes quoque Centrum habebunt, in quo tria plana diametralia ſe mutuo ad angulos rectos decuſſant. Sit C Centrum hujus figuræ, & CA, CB, CD Axes illi principales inter ſe normales,

males, quibus Coordinatæ p, q, r sunt parallelæ, erunt tria plana diametralia $ABab$; ADa; & BDb, quibus hoc Corpus in binas portiones similes æquales secabitur.

117. Ponatur $r = 0$; & æquatio $App + Bqq = aa$ exprimet naturam sectionis principalis $ABab$; quæ idcirco erit Ellipsis Centrum habens in C, cujus semiaxes erunt $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$; & $CB = Cb = \frac{a}{\sqrt{B}}$. Si ponatur $q = 0$, æquatio $App + Crr = aa$, erit pro sectione principali ADa, quæ pariter erit Ellipsis Centrum habens in C, cujus semiaxes erunt $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$, & $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$. Posito autem $p = 0$, prodibit pro tertia sectione principali BDb æquatio $Bqq + Crr = aa$, quæ etiam erit Ellipsis Centrum habens in C & semiaxes $CB = Cb = \frac{a}{\sqrt{B}}$, & $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$. Cognitis autem his tribus sectionibus principalibus, seu tantum earum semiaxibus $CA = \frac{a}{\sqrt{A}}$; $CB = \frac{a}{\sqrt{B}}$ & $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$, natura hujus Corporis determinatur & cognoscitur. Hinc primum istud Superficierum secundi ordinis genus *Elliptoides* appellari conveniet, quia tres ejus sectiones principales sunt Ellipses.

118. Sub hoc genere continentur tres species præ primis notatu dignæ. Prima est, si omnes tres Axes principales CA, CB, & CD inter se fuerint æquales, quo casu tres sectiones principales abibunt in Circulos, ipsumque Corpus in Globum, cujus æquatio, uti supra vidimus, erit

$$pp + qq + rr = aa.$$

Secunda species eos complectitur casus, quibus duo tantum Axes principales sunt inter se æquales. Sit nimirum $CD = CB$, seu $C = B$, atque sectio BDb fiet Circulus, ex æquatione autem $App + B(qq + rr) = aa$ intelligitur omnes sectiones huic parallelas pariter fore Circulos; unde hoc Corpus erit Sphæroides sive oblongum, si AC major sit quam

 BC;

APPEND. BC; ſive compreſſum ſi AC ſit minor quam BC. Tertia denique ſpecies ea complectitur Corpora, in quibus coëfficientes A, B, C ſunt inæquales, quæ ideo nomen generale *Elliptoidis* retinebunt.

119. Sequentia genera Superficierum ſecundi ordinis hac continebuntur æquatione

$$\mathrm{A}pp + \mathrm{B}qq + \mathrm{C}rr = aa,$$

Ac primo quidem ſi nullus coëfficientium A, B, C prorſus deſit; eorum autem, vel unus vel duo, valores habeant negativos. Sit unus tantum negativus, atque conſideremus hanc æquationem

$$\mathrm{A}pp + \mathrm{B}qq - \mathrm{C}rr = aa,$$

TAB. XXXVIII. *Fig.* 144. in qua jam A, B, C numeros affirmativos denotare ponimus. Quod ad Centrum hujus Corporis & plana diametralia attinet, omnia eodem modo ſunt comparata, ut ante. Patet igitur hujus Corporis ſectionem principalem primam $ABab$ eſſe Ellipſin, cujus ſemiaxis $AC = \frac{a}{\sqrt{\mathrm{A}}}$, alterque $BC = \frac{a}{\sqrt{\mathrm{B}}}$. Binæ reliquæ ſectiones principales Aq, BS erunt Hyperbolæ Centrum in C & ſemiaxem conjugatum $= \frac{a}{\sqrt{\mathrm{C}}}$ habentes.

120. Repræſentabit ergo hæc Superficies ſpeciem infundibuli, ſurſum & deorſum ſecundum Hyperbolas divergens. Unde iſta Superficies Aſymtoton habebit Conum æquatione $\mathrm{A}pp + \mathrm{B}qq - \mathrm{C}rr = 0$ expreſſum, Verticem in Centro C habentem, & cujus latera ſunt Aſymtota Hyperbolarum. Stabit autem iſte Conus Aſymtotos intra Superficiem, eritque Conus rectus ſi fuerit $\mathrm{A} = \mathrm{B}$; ſcalenus vero ſi A non ipſi B æquabitur. Axis autem Coni erit recta CD normalis ad planum

planum ABa. Ceterum omnes ſectiones Axi CD normales erunt Ellipſes ſimiles Ellipſi $ABab$, ſectiones vero plano $ABab$ normales omnes erunt Hyperbolæ: unde iſtas Superficies *ellipticе hyperbolicas* vocari conveniet, Aſymtoto ſuo conico circumſcriptas. Hujus igitur Superficies nobis conſtituent genus ſecundum. CAP. V.

121. Species in hoc genere iterum tres notari poterunt: quarum prima erit, ſi $a = 0$, quo caſu Ellipſis $ABab$ in punctum evaneſcit, & Hyperbolæ in lineas rectas abibunt: Superficies vero ipſa cum Aſymtota ſua penitus confundetur, ex quo hæc prima ſpecies complectetur omnes Conos, ſive rectos ſive ſcalenos; unde nova ſubdiviſio fieri poſſet. Altera ſpecies erit ſi fiat $A = B$; quo caſu Ellipſis $ABab$ in Circulum mutatur, & ipſa Superficies fiet rotunda ſeu tornata. Orietur ſcilicet hæc Superficies, ſi Hyperbola quæcunque circa Axem conjugatum convertatur. Tertia ſpecies ab ipſo genere non diſcrepabit.

122. Tertium genus definiamus, ſi duo coëfficientes terminorum pp, qq, & rr fiant negativi, cujus ergo æquatio ſit

$$App - Bqq - Crr = aa.$$

Poſito ergo $r = 0$, erit prima ſectio principalis Hyperbola $EAFeaf$ Centrum habens in C, cujus ſemiaxis tranſverſus erit $= \frac{a}{\sqrt{A}}$, & ſemiaxis conjugatus $= \frac{a}{\sqrt{B}}$. Altera ſectio principalis, poſito $q = 0$, pariter erit Hyperbola AQ, aq, eodem ſemiaxe tranſverſo prædita, ſed cujus Axis ſemiconjugatus erit $= \frac{a}{\sqrt{C}}$: tertia ſectio principalis fit imaginaria. Tota denique hæc Superficies intra Superficiem conicam Aſymtotam erit ſita: unde hoc genus vocari poteſt *hyperbolico-hyperbolicum* Cono Aſymtoto inſcriptum. Si fiat $B = C$, Superficies erit rotunda, orta ex converſione Hyperbolæ circa ſuum Axem tranſverſum, quo caſu ſpecies peculiaris conſtitui poſſet. Sin autem TAB. XXXIX. Fig. 145.

Append. autem ponatur $a = 0$, oritur Superficies conica, quam jam, tanquam speciem generis præcedentis, sumus contemplati.

123. Ad sequentia genera cognoscenda ponamus unum coëfficientium A, B, C evanescere. Sit igitur $C = 0$, atque æquatio generalis §. 114. inventa erit

$$App + Bqq + Gp + Hq + Ir + K = 0,$$

in qua, augendo seu diminuendo Ordinatas p & q, termini Gp & Hq, non vero Ir tolli poterit. Relinquetur ergo terminus Ir in æquatione: ejus vero ope tolli poterit terminus ultimus K, unde ejusmodi æquationem habebimus

$$App + Bqq = ar,$$

cujus duo casus sunt perpendendi. Prior si uterque coëfficiens A & B fuerit affirmativus: posterior si alter sit negativus. Utroque autem casu Centrum Superficiei in Axe CD erit situm sed ad distantiam infinitam remotum.

124. Sint primo ambo coëfficientes A & B affirmativi: quo casu constituatur genus quartum, æquatione hac contentum

$$App + Bqq = ar.$$

Tab. XXXIX. Fig. 146. Prima ergo sectio principalis oriunda si ponatur $r = 0$, in punctum evanescet; altera posito $q = 0$; & tertia posito $p = 0$, utraque erit Parabola. Nempe MAm & NAn. Cum igitur hujus Superficiei omnes sectiones ad Axem AD normales sint Ellipses; sectiones vero per hunc ipsum Axem factæ Parabolæ, hujus generis Corpora *elliptico-parabolica* appellabimus. Cujus species sunt notandæ duæ: altera si $A = B$, quo casu oritur Corpus rotundum, *conoides parabolicum* vocatum: altera vero si $a = 0$, fitque $App + Bqq = bb$, quæ dat Cylindros, tam rectos si $A = B$, quam scalenos si A & B fuerint inæquales.

125. Quintum

125. Quintum genus continebitur hac æquatione Cap. V.

$$App - Bqq = ar,$$

cujus ſectio principalis prima, facto $r = o$, erunt duæ lineæ Tab. rectæ Ee, Ff ſe mutuo in puncto A decuſſantes. Omnes vero XXXIX. ſectiones huic parallelæ erunt Hyperbolæ ſua centra in Axe Fig. 147. AD habentes, & intra Aſymtotas rectas Ee & Ff conſtitutæ. Duo igitur plana, quæ plano ABC in Lineis Ee & Ff normaliter inſiſtunt, in infinitum cum Superficie propoſita congruent, ideoque hæc Superficies pro Aſymtoto habebit duo plana ſe mutuo decuſſantia, ſectiones reliquæ principales in planis ACD & ABd factæ erunt Parabolæ: unde Superficies ad hoc genus pertinentes vocabimus *parabolico-hyperbolicas* duo plana pro Aſymtotis habentes: cujus ſpecies, (ſi $a = o$, ut ſit $App - Bqq = bb$,) erit Cylindrus hyperbolicus, cujus omnes ſectiones ad Axem AD normales erunt Hyperbolæ inter ſe æquales: ſi inſuper ſit $b = o$, oriuntur duo illa ipſa plana aſymtotica.

126. Sextum denique genus Superficierum ſecundi ordinis complectetur hæc æquatio

$$App = aq,$$

quæ præbet Cylindrum Parabolicum, cujus omnes ſectiones Axi AD normales erunt Parabolæ ſimiles & æquales, ita ut ſingularum Vertices in rectam AD incidant & Axes inter ſe ſint paralleli. Ad hæc igitur ſex genera omnes Superficies ſecundi ordinis reduci poterunt, ita ut nulla exhiberi poſſit, quæ non in uno horum generum contineatur. Ceterum, ſi in genere ultimo fiat $a = o$, ut ſit $App = bb$, hæc æquatio præbebit duo plana inter ſe parallela, quæ quaſi ſpeciem hujus generis conſtituent. Similitudo ſcilicet hic, uti in Lineis ſecundi ordinis obtinet, ubi vidimus duas rectas ſe decuſſantes Hyperbolæ ſpeciem, duas autem Lineas parallelas Parabolæ ſpeciem conſtituere.

127. Quanquam hæc ſex genera ex æquatione ſimpliciſſima, ad quam Superficies ſecundi ordinis reducere licet, formavimus; tamen nunc facile erit, ſi æquatio quæcunque ſecundi gradus ſit propoſita, genus aſſignare ad quod Superficies pertineat. Quod ſi enim propoſita fuerit hæc æquatio

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \varkappa = 0,$$

judicium ex ſupremis terminis, in quibus duæ variabilium occurrunt dimenſiones, petendum erit; ſpectari ſcilicet debebunt hi termini

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx,$$

in quibus ſi fuerit

$4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; $4\delta\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$
&
$\alpha\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta$ minor quam $\beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$,

Superficies erit clauſa & ad genus primum, quod Elliptoides vocavimus, pertinebit.

128. Si una pluresve harum conditionum deſint; neque tamen ſit $\alpha\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$, Superficies vel ad ſecundum vel ad tertium genus pertinebit, eritque corpus hyperbolicum Cono Aſymtoto præditum, eique vel circumſcriptum in genere ſecundo, vel inſcriptum in genere tertio. At, ſi fuerit $\alpha\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$, quo caſu expreſſio

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx,$$

reſolvi poterit in duos Factores ſimplices, ſive imaginarios ſive reales. Caſu priori Superficies pertinebit ad genus quartum, poſteriori vero ad quintum. Quod ſi denique iſta expreſſio duos habeat Factores æquales, ſeu ſit quadratum, tum orietur genus ſextum. Sicque ſtatim facile dijudicari poterit, ad quodnam genus quævis æquatio propoſita pertineat; difficilius

cilius tantum erit judicium circa genus ſecundum & tertium: quæ ambo ideo in unum conflari poſſent.

129. Simili modo Superficies tertii & ſequentium ordinum pertractari atque in genera dividi poterunt. Spectari ſcilicet tantum debebunt æquationis generalis termini ſuprêmi, & conſequenter, pro Superficiebus tertii ordinis, ii in quibus Coordinatæ tres obtinent dimenſiones, qui erunt

$$\alpha z^3 + \beta yzz + \gamma y^2 z + \delta x^2 z + \varepsilon xzz + \zeta xyz + \text{\&c.}.$$

Primum igitur diſpiciendum eſt, utrum hi termini conjunctim ſumti, ſeu æquationis membrum ſupremum, reſolvi poſſit in Factores ſimplices an non. Si reſolutionem in Factores reſpuat, habebit Superficies Conum tertii ordinis pro Aſymtoto. Quia autem natura hujus Coni exprimitur ſupremo membro nihilo æquali poſito, plures hujuſmodi Coni tertii ordinis dabuntur, ex quorum diverſitate hinc plura Superficierum genera conſtituentur. Quamvis enim Coni ſecundi ordinis omnes ad unum genus referuntur, quia ſunt vel recti vel ſcaleni; tamen in tertio ordine multo major varietas locum invenit.

130. Expoſitis ergo his generibus, conſiderandi ſunt caſus, quibus ſupremum membrum in Factores ſimplices reſolvi poteſt, ſive ſint reales ſive imaginarii. Habeat primum unum Factorem ſimplicem, qui erit realis: ex eo Superficies habebit Aſymtotam planam. Alter Factor nihilo æqualis poſitus vel dabit æquationem poſſibilem vel non: ſi æquatio fuerit impoſſibilis, niſi omnes Coordinatæ evaneſcant, unica erit Aſymtota plana: ſin autem ſit impoſſibilis, Superficies duas habebit Aſymtotas, alteram planam, alteram Conum ſecundi ordinis. Quod ſi habeat tres Factores ſimplices, quia unus ſemper eſt realis, ſi bini reliqui ſint vel imaginarii, vel reales, duo nova genera oriuntur. Denique ſi omnes tres Factores ſimplices ſint reales, prout duo vel omnes ſint inter ſe æquales, adhuc duo genera conſtitui poterunt. Nulla autem in hoc ordine datur Superficies, quæ non in infinitum extendatur.

CAPUT VI.

De intersectione duarum Superficierum.

APPEND. 131. SUpra jam exposita est methodus investigandi naturam sectionis, quæ oritur si Superficies quæcunque a plano secatur. Cum enim Linea curva, quam sectio format, tota posita sit in eodem plano, quo sectio est facta, binas Coordinatas, quarum relatione natura hujusmodi Linearum curvarum exprimi solet, in eodem plano assumsimus, ut hoc pacto cognitio ad receptam rationem reduceretur. At, si Superficies secans non fuerit plana, quoniam tum sectio non in eodem plano jacebit, ejus natura duabus Coordinatis comprehendi nequit: quapropter alio modo erit utendum, ad hujusmodi sectiones æquationibus includendas, quibus cujusque puncti positio vera indicetur.

132. Punctorum autem non in eodem plano sitorum loca definiri possunt, si tria plana inter se normalia in subsidium adhibeantur, atque pro quovis puncto ternæ illæ distantiæ assignentur, quibus id a quolibet plano distat. Hinc tres variabiles requirentur ad naturam Lineæ curvæ non in eodem plano constitutæ exprimendam; ita ut, si una pro libitu definiatur, ex ea binæ reliquæ valores determinatos obtineant. Una igitur æquatio inter tres illas Coordinatas non sufficit ad hoc præstandum; quippe, quæ indolem universæ Superficiei cujusdam indicaret; quocirca duabus opus erit æquationibus, quarum ope, si uni variabili datus valor tribuatur, simul binarum reliquarum valores determinentur.

133. Natura igitur cujusque Lineæ curvæ, quam in eodem plano constitutam esse non constat, commodissime exprimitur duabus æquationibus inter tres variabiles, puta x, y, z, quæ totidem Coordinatas inter se normales repræsentabunt. Ope duarum ergo hujusmodi æquationum binæ variabiles ex tertia determi-

determinari poterunt, æquabitur scilicet tam y quam z Functioni cuipiam ipsius x. Poterit etiam pro arbitrio una variabilium eliminari; unde tres æquationes duas tantum variabiles involventes formabuntur, una inter x & y, altera inter x & z, & tertia inter y & z. Harum trium vero æquationum quævis per binas reliquas sponte determinatur, ita ut, si habeantur æquationes inter x & y, & inter x & z, ex his tertia jam per eliminationem ipsius x inveniatur. CAP. VI.

134. Sit ergo proposita Linea quæcunque curva non in eodem plano posita, cujus unum quoddam punctum sit M. Sumantur pro arbitrio tres Axes invicem normales AB, AC, & AD, quibus tria plana invicem normalia BAC, BAD & CAD determinantur. Ex puncto Curvæ M in planum BAC demittatur perpendiculum MQ, & ex puncto Q ad Axem AD ducatur normalis QP, erunt AP, PQ & QM tres illæ Coordinatæ, inter quas si duæ dentur æquationes, natura Curvæ determinatur. Vocentur ergo $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; & ex duabus æquationibus inter x, y & z propositis, eliminando z, formetur aquatio duas tantum variabiles x & y continens, quæ determinabit positionem puncti Q in plano BAC; atque singula puncta Q ex singulis M orta præbebunt Lineam curvam EQF, cujus natura æquatione illa inter x & y inventa exprimetur. TAB. XL. Fig. 148.

135. Hoc igitur modo ex duabus æquationibus inter tres Coordinatas propositis facile cognoscitur natura Curvæ EQF, quæ formatur demittendis ex singulis Curvæ indagandæ punctis M perpendiculis MQ in planum BAC. Curva autem hæc EQF vocatur *projectio* Curvæ GMH in planum BAC. Quemadmodum autem projectio in plano BAC facta invenitur eliminando variabilem z, ita ejusdem Curvæ projectio in plano BAD vel in plano CAD obtinebitur, si vel variabilis y eliminetur vel x. Una autem projectio EQF non sufficit ad Curvam GMH cognoscendam, sin autem pro singulis punctis Q cognita fuerint perpendicula $QM = z$, ex projectione EQF ipsa Curva GMH facile construetur.

 Ad

APPEND. Ad hoc igitur opus eſt, ut præter æquationem inter x & y, qua natura projectionis exprimitur, habeatur æquatio inter z & x, vel inter z & y, vel etiam inter tres z, x, y, ex qua longitudo perpendiculi $QM = z$ pro quovis puncto Q innoteſcat.

136. Cum autem æquatio inter z & x exprimat projectionem Curvæ GMH in plano BAD factam, æquatio autem inter z & y projectionem in plano CAD, atque æquatio inter tres variabiles z, y & x exhibeat Superficiem, in qua Curva GMH verſetur: manifeſtum eſt primum ex duabus projectionibus ejuſdem Curvæ GMH in duobus planis factis ipſam Curvam GMH cognoſci. Tum vero perſpicuum eſt, ſi detur Superficies, in qua Linea curva GMH contineatur, atque præterea ejus projectio in quodam plano, pariter Curvam illam fore cognitam. Erigantur enim ex ſingulis projectionis punctis rectæ normales QM, quarum interſectio cum Superficie definiet Curvam GMH quæſitam.

137. His præmiſſis, quæ ad indolem cujuſque Curvæ non in eodem plano conſtitutæ cognoſcendam pertinent, non difficile erit interſectionem duarum quarumvis Superficierum definire. Quemadmodum enim interſectio duorum planorum eſt Linea recta, ita interſectio duarum Superficierum quarumvis erit Linea, ſive recta ſive curva; hæcque vel in eodem plano poſita vel ſecus. Utcunque autem fuerit comparata, ſingula ejus puncta ad utramque Superficiem pertinebunt, ideoque in æquatione utriuſque Superficiei continebuntur. Quod ſi ergo ambæ Superficies exprimantur æquationibus inter ternas Coordinatas, quæ ad eadem tria plana principalia inter ſe normalia ſeu ad eoſdem tres Axes inter ſe normales AB, AC & AD referantur, tum ambæ iſtæ æquationes conjunctæ naturam interſectionis exprimént.

138. Propoſitis ergo duabus Superficiebus ſe mutuo ſecantibus, utriuſque natura exprimi debet æquatione inter tres Coordinatas, quæ ad eoſdem Axes principales referantur: ſicque habebuntur duæ æquationes inter tres Coordinatas x,

y &

y & z, ex quibus si una eliminetur, æquatio inter binas reliquas præbebit projectionem intersectionis in plano, quod his duabus Coordinatis constituitur, factæ. Hoc igitur modo quoque intersectio cujusque Superficiei a plano factæ investigari poterit: cum enim æquatio generalis pro plano sit $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$, si in æquatione Superficiei loco z substituatur ejus valor ex illa æquatione oriundus, nempe $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$, prodibit æquatio pro projectione intersectionis in plano Coordinatarum x & y facta. Simul vero æquatio $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ pro quovis puncto Q projectionis præbebit quantitatem perpendiculi QM ad ipsam intersectionem pertingentis.

139. Quod si eveniat ut æquatio pro projectione fiat impossibilis, uti si inveniretur $xx + yy + aa = 0$; tum hoc erit indicium, ambas Superficies se mutuo nusquam intersecare. Sin autem æquatio projectionis in unicum punctum deducat, seu, si projectio in punctum evanescat, tum ipsa quoque intersectio erit punctum, ideoque ambæ Superficies se mutuo in puncto contingent; qui contactus itaque ex æquatione cognosci poterit. Datur autem præterea contactus linearis, quando duæ Superficies se in infinitis punctis contingunt; Lineaque contactus vel erit recta vel curva. Recta scilicet erit, si planum tangat Cylindrum vel Conum: Conus rectus autem a Globo intus tangetur per Peripheriam Circuli. Qui contactus ex æquatione cognoscentur, si pro projectione ejusmodi prodierit æquatio, quæ duas habeat radices æquales, propterea quod contactus nil aliud est, nisi concursus duarum intersectionum.

140. Ad hæc clarius explicanda ponamus Globum secari a plano quocunque. Sumamus æquationem ad Centrum Globi accommodatam $zz + yy + xx = aa$, pro plano autem utcunque posito hæc habebitur æquatio

$$\alpha z + \beta y + \gamma x = f,$$

unde

APPEND. unde, cum sit $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$, sequens orietur æquatio inter x & y pro projectione

$$0 = ff - \alpha^2 a^2 - 2\beta f y - 2\gamma f x + (\alpha^2 + \beta^2) y^2 + 2\beta\gamma xy + (\alpha^2 + \gamma^2) xx,$$

quam patet esse Ellipsin, si quidem æquatio fuerit realis; sin autem fuerit imaginaria Globus a plano nusquam tangetur: at, si Ellipsis in punctum evanescat, planum & Globus se mutuo tangent. Qui casus ut eruatur, quæratur

$$y = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha\sqrt{(a^2(\alpha^2+\beta^2) - f^2 + 2\gamma f x - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) xx)}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

ubi si f ejusmodi habuerit valorem, ut quantitas radicalis nunquam fieri possit realis, nullus dabitur contactus, neque intersectio.

141. Ponamus esse $f = a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$ eritque

$$y = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha x \sqrt{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} \mp \alpha\gamma a\sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2};$$

cui æquationi realiter satisfieri nequit, nisi sit

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}, \ \& \ y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}.$$

Quare, si fuerit $f = a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$, planum, quod exprimitur æquatione $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$, Globum tanget; punctumque contactus habebitur, si capiatur

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}; \ y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}, \ \& \ z = \frac{\alpha a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$$

quorum valorum veritas per Geometriam elementarem, ubi contactus Sphæræ a plano docetur, comprobari potest.

142. Hinc igitur generalis regula deducitur, cujus ope cognosci potest, utrum Superficies quæcunque a plano aliave Superficie

Superficie tangatur an non? Eliminata enim ex ambabus æquationibus una variabili, videndum eſt an æquatio reſultans reſolvi poſſit in Factores ſimplices an minus. Si enim habeat duos Factores ſimplices imaginarios, dabitur contactus in puncto, quod innoteſcet ponendo utrumque Factorem $= 0$. Sin autem habeat duos Factores ſimplices reales eoſque inter ſe æquales, Superficies ſe mutuo ſecundum Lineam rectam tangent. Quod ſi vero illa æquatio habeat duos Factores non ſimplices æquales; ſeu, ſi fuerit per quadratum diviſibilis, tum ejus radix nihilo æqualis poſita exhibebit projectionem illius Lineæ, quæ ex contactu oritur. Hinc quoque patet ſi eadem illa æquatio quatuor habuerit Factores imaginarios, tum Superficies ſe mutuo in duobus punctis contingere. Cap. VI.

143. Quo hæc plenius explicentur, inveſtigemus contactum Coni & Globi cujus Centrum in Axe Coni ſit poſitum. Æquatio pro Globo eſt $zz + yy + xx = aa$, pro Cono autem $(f - z)^2 = mxx + nyy$, poſito quod Vertex Coni intervallo f a Centro Globi ſit remotus. Eliminemus hinc variabilem y, eritque

$$(f - z)^2 = naa - nzz + (m - n)xx,$$

pro projectione interſectionis in plano Coordinatarum x & z. Sit primum Conus rectus, ſeu $m = n$, eritque

$$z = \frac{f \pm \surd(n(1 + n)aa - nff)}{1 + n}.$$

Quare, ſi fuerit $f = a\surd(1 + n)$, erit dupliciter $z = \frac{a}{\surd(1 + n)}$, ideoque contactus erit linearis; ſcilicet per Circulum, cujus projectio in plano per Axem tranſeunte eſt Linea recta ad Axem normalis.

144. Pro Cono autem ſcaleno, ubi m, & n ſunt inæquales, æquatio inventa videtur ſemper dare interſectionem, cum ta-

APPEND. men ſæpius nulla exiſtat. Semper enim, ſi quidem m ſuperet n, prodibit æquatio realis pro projectione interſectionis: at vero notandum eſt realitatem projectionis non ſemper indicare interſectionem realem. Ut enim ipſa interſectio ſit realis non ſufficit projectionem eſſe realem, ſed inſuper perpendicula a projectione ad interſectionem ducta realia eſſe oportet. Quamvis igitur omnis Curva realis habeat quaſvis projectiones reales; tamen non viciſſim ex realitate projectionis realitas ipſius Curvæ, quæ quæritur, concludi poteſt. Hæcque cautela perpetuo probe eſt adhibenda, ne realitate æquationum, quas pro projectionibus invenimus, abutamur.

145. Hoc incommodum evitabimus, ſi projectionem in plano Ordinatarum x & y quæramus: quia enim in hoc plano nullum datur punctum, cui non punctum in conica Superficie reſpondeat, ſi projectio in hoc plano fuerit realis, ipſa quoque interſectio erit realis. Cum igitur ſit $z = \sqrt{(aa - xx - yy)}$, fiet ex altera æquatione

$$f - \sqrt{(aa - xx - yy)} = \sqrt{(mxx + nyy)}$$

ſeu

$$aa + ff - (1+m)xx - (1+n)yy = 2f\sqrt{(aa - xx - yy)}$$

porroque

$$\left.\begin{matrix} (aa-ff)^2 \left.\begin{matrix} -2(aa-ff) \\ -2(aa+ff)m \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} -2(aa-ff) \\ -2(aa+ff)n \end{matrix}\right\} y^2 + \\ (1+m)^2x^4 + 2(1+m)(1+n)x^2y^2 + (1+n)^2y^4 \end{matrix}\right\} = 0$$

unde fit

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{aa - ff + n(aa+ff) - (1+m)(1+n)xx \pm}{(1+n)^2} \\ \dfrac{2f}{(1+n)^2}\sqrt{(n(1+n)aa - nff + (m-n)(1+n)xx)} \end{matrix}\right\} = y^2$$

&

$aa -$

Cap. VI.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{aa-ff+m(aa+ff)-(1+m)(1+n)yy\pm}{(1+m)^2}\\ \dfrac{2f}{(1+m)^2}\surd(m(1+m)aa-mff+(n-m)(1+m)yy\end{array}\right\}=x^2.$$

146. Ut igitur æquatio inventa habeat Factores, oportet esse vel $ff=(1+n)aa$ vel $ff=(1+m)aa$. Priori casu fit

$$yy=\frac{naa-(1+m)xx}{1+n}\pm\frac{2fx\surd(m-n)}{(1+n)\surd(1+n)},$$

unde, si sit m minor quam n, necesse est ut sit $x=0$ & $y=\pm a\surd\frac{n}{1+n}$, & $z=\frac{a}{\surd(1+n)}$. Dantur ergo duo puncta contactus ab Axe Coni utrinque æqualiter distantia. Sin autem fuerit m major quam n, sumi debet altera æquatio

$$xx=\frac{maa-(1+n)yy}{1+m}\pm\frac{2fy\surd(n-m)}{(1+m)\surd(1+m)},$$

quæ realis esse nequit, nisi sit $y=0$; quo casu fit $x=\pm a\surd\frac{m}{1+m}$; & $z=\frac{a}{\surd(1+m)}$. Hocque ergo casu dabuntur duo alia contactus puncta; contactus enim existet in ea Coni parte, ubi est arctissimus. Simili itaque modo in singulis casibus contactus judicari debebit.

147. Modus autem longe facilior determinandi plana tangentia quarumcunque Superficierum deduci potest ex methodo inveniendi tangentes Linearum curvarum supra tradita. Sit natura Superficiei, cujus plana tangentia quærimus, expressa æquatione inter tres Coordinatas $AP=x$, $PQ=y$, & $QM=z$, ex qua definiri oportet positionem plani Superficiem in puncto M tangentis. Primum igitur consideramus si Superficies secetur plano quocunque per punctum M transeunte, sectionis inde ortæ tangentem in puncto M sitam fore in plano tangente. Quare, si duarum hujusmodi sectionum tangentes in Tab. XL. Fig. 149.

APPEND. in puncto M invenerimus, planum quod his duabus rectis tangentibus definitur, ipsam Superficiem in puncto M contingere debere.

148. Secetur ergo primum Superficies plano ad planum APQ normali, secundum rectam QS parallelam Axi AP. Tum simili modo fiat sectio per punctum M pariter normalis ad planum APQ, sed secundum rectam QP Axi AP normalem; seu, prior sectio sit normalis ad Axem AB, posterior vero ad Axem AP. Sit Curva EM prior sectio, cujus quæratur tangens MS rectæ QS in puncto S occurrens, ita ut sit QS subtangens. Sectio posterior sit Linea curva FM, cujus tangens sit recta MT & subtangens QT. Quibus inventis planum SMT Superficiem in puncto M tanget. Ducta ergo ST dabit intersectionem plani tangentis cum plano APQ; atque, si ex Q ad ST normalis ducatur QR, tum erit QR ad QS uti sinus totus ad tangentem anguli MRQ, quo planum tangens ad planum APQ inclinatur.

149. Ponamus per methodum Tangentium supra traditam inventas esse subtangentes $QS = s$ & $QT = t$; erit $PT = t - y$, & $PX = s - \frac{sy}{t}$; unde fit $AX = x + \frac{sy}{t} - s$. Innotescit ergo hinc punctum X, in quo recta ST Axem AP trajicit: &, quia angulus $AXS = TSQ$, erit hujus anguli tangens $= \frac{t}{s}$, ex quo positio intersectionis plani tangentis cum plano APQ cognoscitur. Deinde, ob $ST = \sqrt{(ss + tt)}$, erit $QR = \frac{st}{\sqrt{(ss + tt)}}$, per quam si dividatur QM prodibit tangens anguli inclinationis $MRQ = \frac{z\sqrt{(ss + tt)}}{st}$. Si porro ad MR normalis ducatur MN, erit hæc cum ad planum tangens, tum ad ipsam Superficiem in puncto M normalis. Ejus ergo positio colligitur ex $QN = \frac{zz\sqrt{(ss + tt)}}{st}$. Demittatur ex N ad Axem AP perpendicularis

dicularis NV, ob angulum $QNV = QST$, erit $PV = \frac{zz}{t} = QW$ & $NW = \frac{zz}{t}$. Quare, si hoc modo definiatur positio puncti N in plano APQ, recta NM erit normalis in Superficiem. Cap. VI.

150. Quemadmodum intersectio duarum Superficierum per projectiones indagari debet, supra jam est ostensum. Inquiramus autem cujus ordinis futura sit projectio, pro ordine, ad quem Superficies referuntur. Ac primo quidem duæ Superficies primi ordinis, seu planæ, pro intersectione ejusque projectione dant Lineam primi ordinis. Deinde quoque vidimus hanc projectionem ultra secundum ordinem assurgere non posse, si altera Superficies fuerit primi ordinis altera secundi. Simili modo manifestum est, si altera Superficies fuerit tertii ordinis altera primi, projectionem tertium gradum non esse transgressuram & ita porro. Sin autem duæ Lineæ secundi ordinis se mutuo secent, projectio intersectionis erit vel quarti ordinis vel inferioris; atque generaliter si altera Superficies sit ordinis m, altera ordinis n, intersectionis projectio ad altiorem ordinem, quam qui numero mn indicatur, nunquam referetur.

151. Quando neutra Superficierum se mutuo secantium est plana, plerumque sectio earum mutua est Linea curva non in eodem plano constituta. Hoc tamen non obstante fieri potest, ut tota sectio in eodem plano sit posita; id quod eveniet si ambæ Superficierum æquationes junctim sumtæ hujusmodi æquationem $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$ in se complectantur. Quod utrum eveniat, ex duabus æquationibus propositis definiantur binæ variabiles z & y per tertiam x, fiatque $z = P$ & $y = Q$, existentibus P & Q Functionibus ipsius x. Tum dispiciatur, an ejusmodi numerus n detur, ut in $P + nQ$ omnes potestates ipsius x se mutuo tollant, præter infimam x & terminos constantes. Quod si eveniat, fueritque $P + nQ = mx + k$, sectio erit in eodem plano, hocque planum indicabitur æquatione $z + ny = mx + k$.

 152. Sint,

APPEND.

152. Sint, verbi gratia, propoſitæ ſequentes duæ Superficies ſecundi ordinis altera pro Cono recto $zz = xx + yy$, altera pro Superficie ſecundi generis elliptico-hyperbolica $zz = xx + 2yy - 2ax - aa$. Ex quibus cum ſit $xx + 2yy - 2ax - aa = xx + yy$, erit $y = \sqrt{(2ax + aa)}$ & $z = x + a$, quæ ultima æquatio jam indicat totam ſectionem in eodem plano eſſe ſitam, cujus poſitio determinetur æquatione $z = x + a$. Hac igitur ratione plurimæ quæſtiones ad naturam Superficierum pertinentes reſolvi poterunt. Quæ autem methodum hic expoſitam tranſgrediuntur, eæ Analyſin infinitorum requirunt, ad quam ſcientiam hæc, quæ his libris tradita ſunt, viam præparant.

F I N I S.

TAB: I *pag.*

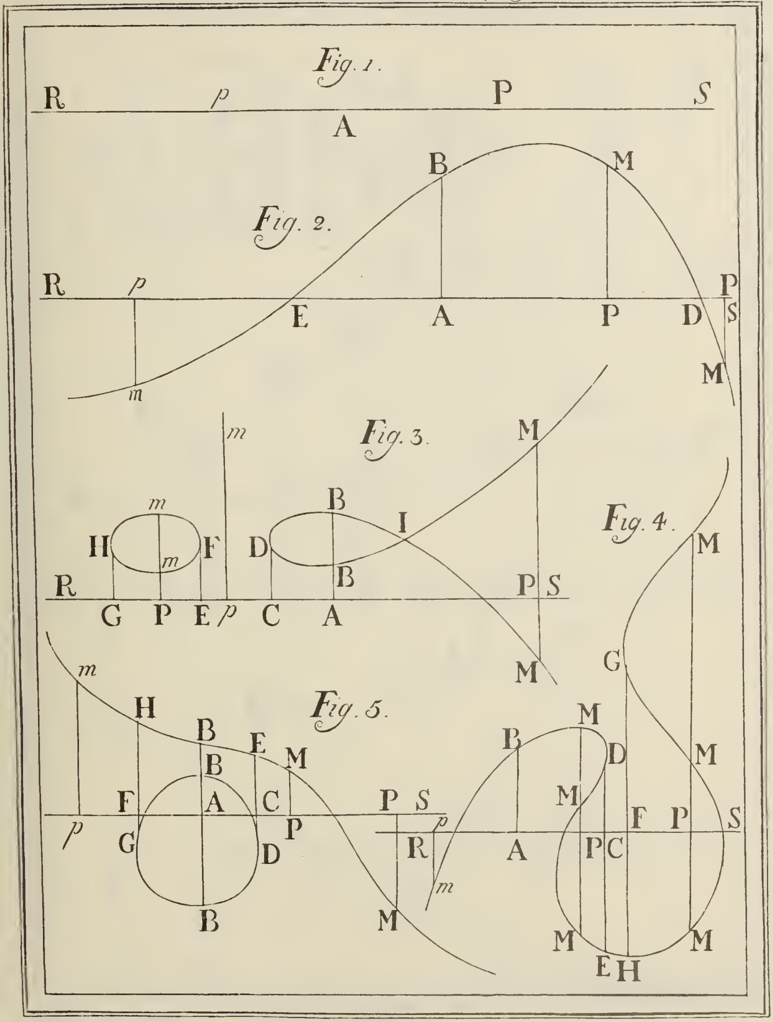


Fig. 1.
R p P S
A
Fig. 2.
B M
R p P
E A P D S
m M
Fig. 3.
m
M
B
m I
H F D
m
B
R P S
G P E p C A
M
Fig. 4.
M
G
Fig. 5.
m
H
B
E M
B
F A C
P S
p G D P
B M
B M D
M
F P S
p R A P C
m
M M
E H

TAB: II.

pag.

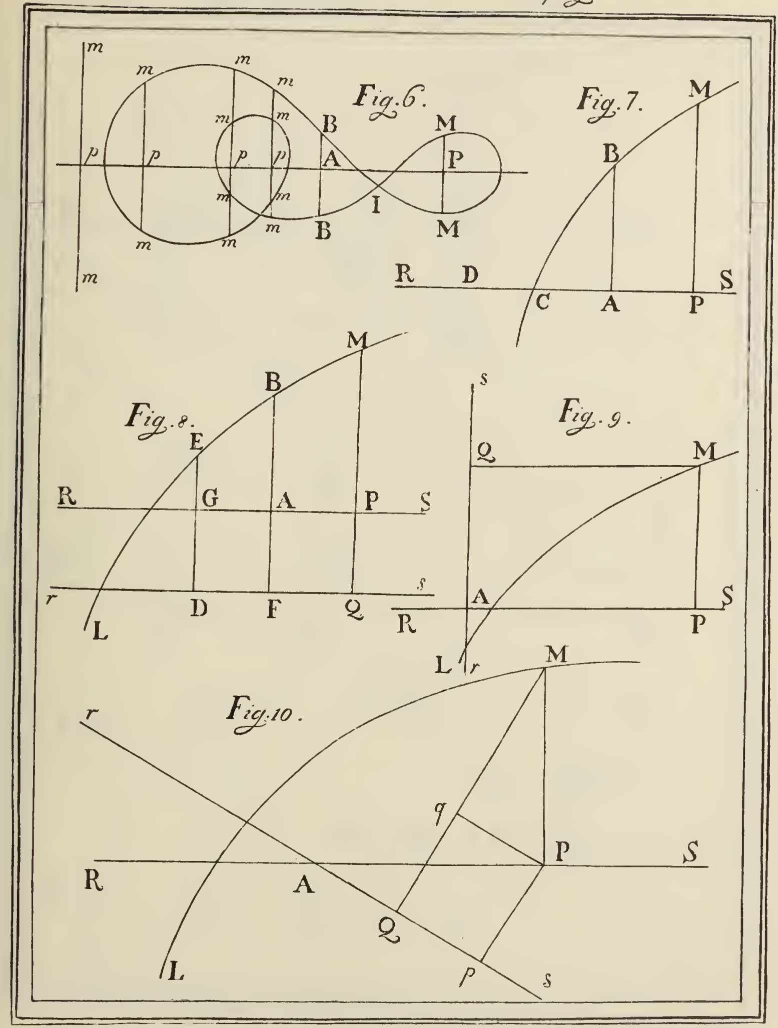


Fig. 6.
m
m
m
m
m
m
p
p
p
p
m
m
m
m
m
m
m
B
A
I
B
M
P
M
Fig. 7.
M
B
R
D
S
C
A
P
Fig. 8.
M
B
E
R
G
A
P
S
r
s
D
F
Q
L
Fig. 9.
s
Q
M
A
S
R
P
L
r
Fig. 10.
M
r
q
P
S
R
A
Q
L
p
s

TAB: III. *pag.*

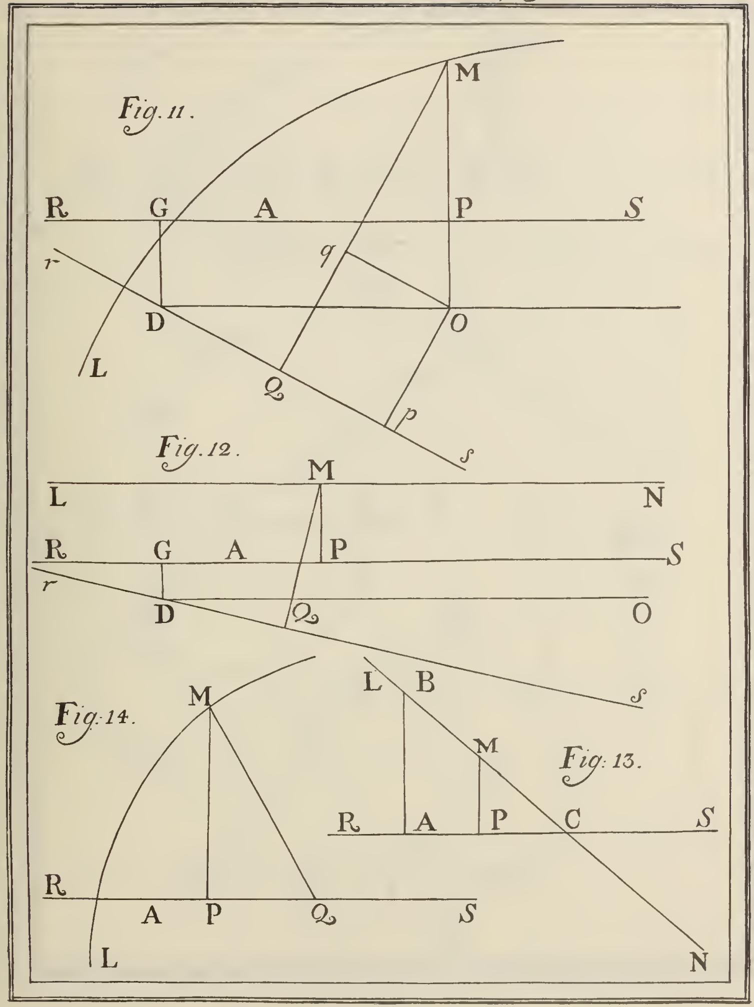


Fig. 11.
M
R G A P S
q
r
D O
L
Q
p
s
Fig. 12.
M
L N
R G A P S
r
D Q O
s
Fig. 14.
M
R
A P Q S
L
L B
M
Fig: 13.
R A P C S
N

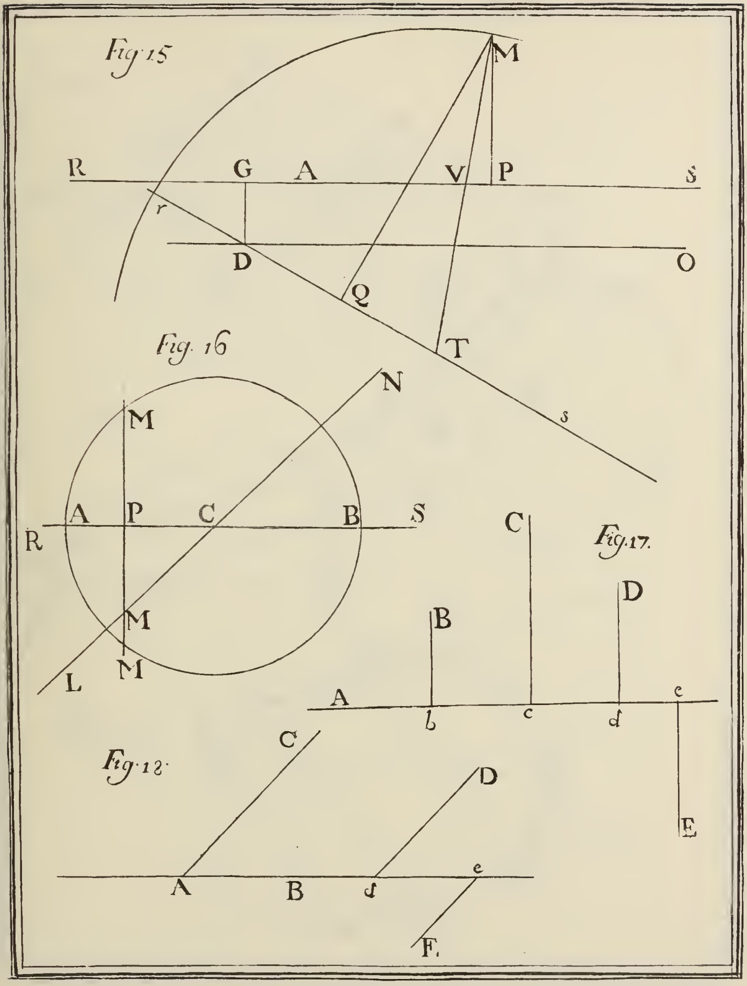


Fig. 15
M
R
G
A
V
P
S
r
D
O
Q
T
s
Fig. 16
N
M
A
P
C
B
S
R
M
M
L
C
Fig. 17
D
B
A
b
c
d
e
E
Fig. 18
C
D
A
B
d
e
F.

TAB.V.

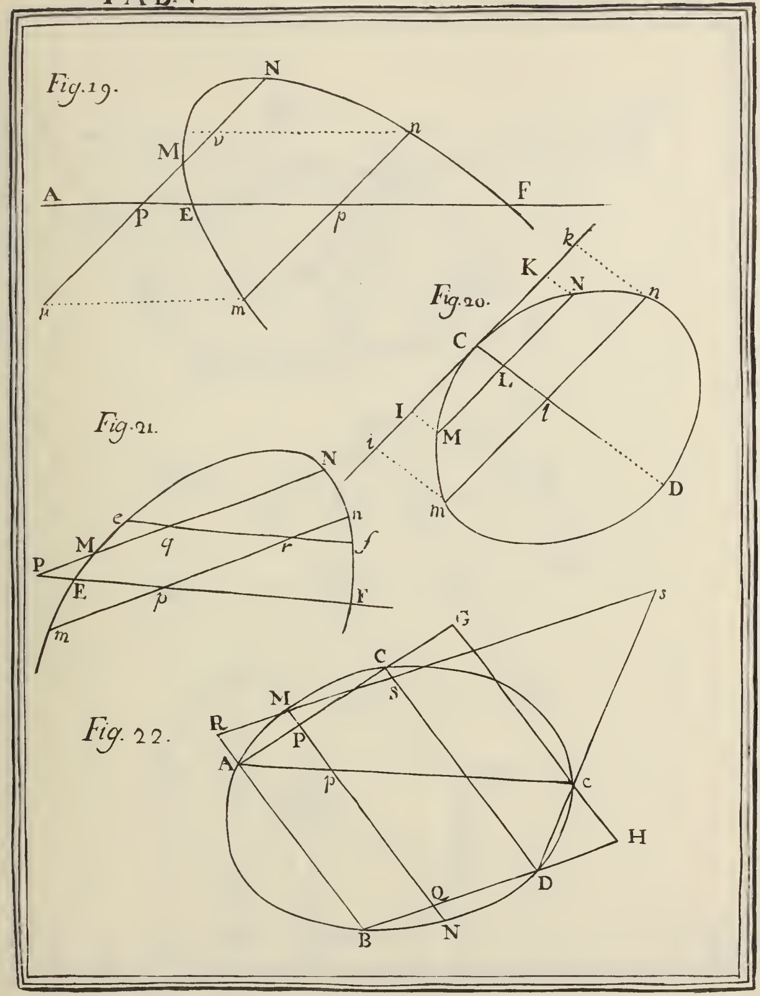


Fig.19.
N
n
v
M
A
F
P
E
p
μ
m
Fig.20.
k
K
N
n
C
L
l
I
M
i
D
m
Fig.21.
N
n
e
M
q
r
f
P
E
p
F
m
Fig. 22.
G
s
C
S
M
R
P
A
p
c
H
D
Q
B
N

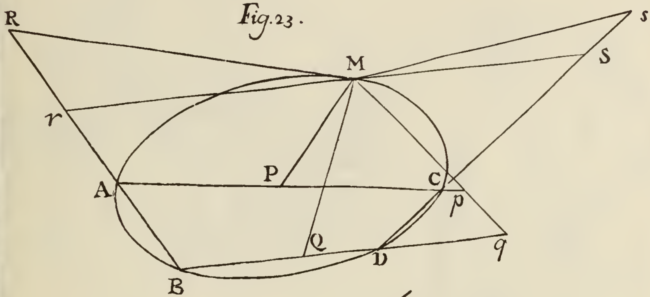


Fig. 23.

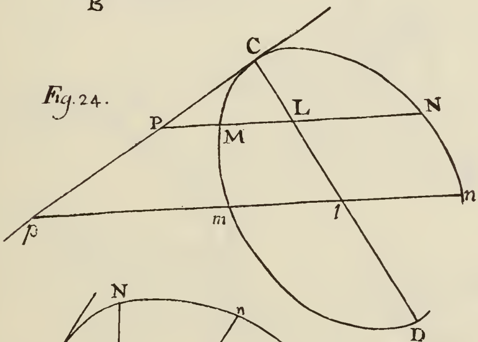


Fig. 24.

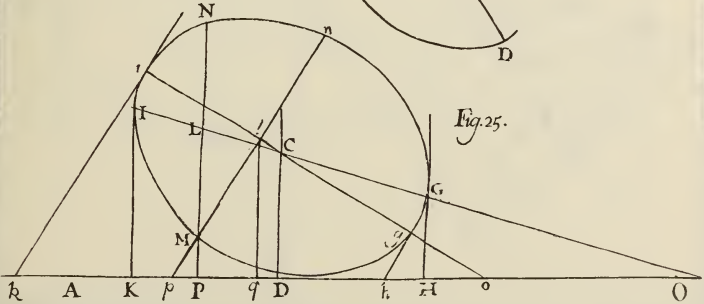


Fig. 25.

TAB. VII.

Fig. 26.

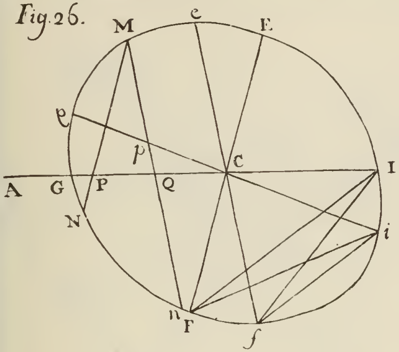


Fig. 27.

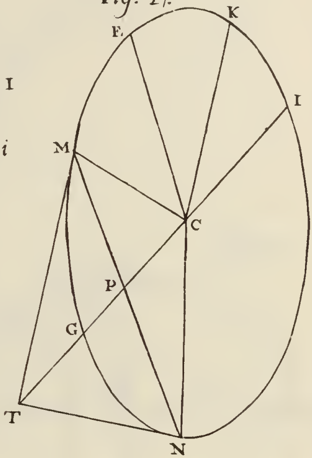


Fig. 28.

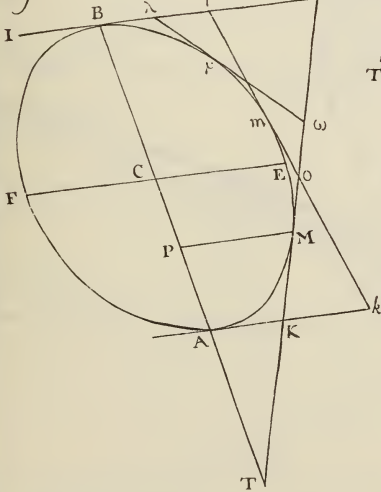
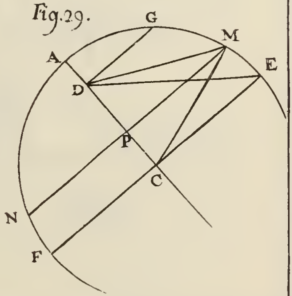


Fig. 29.



TAB. VIII.

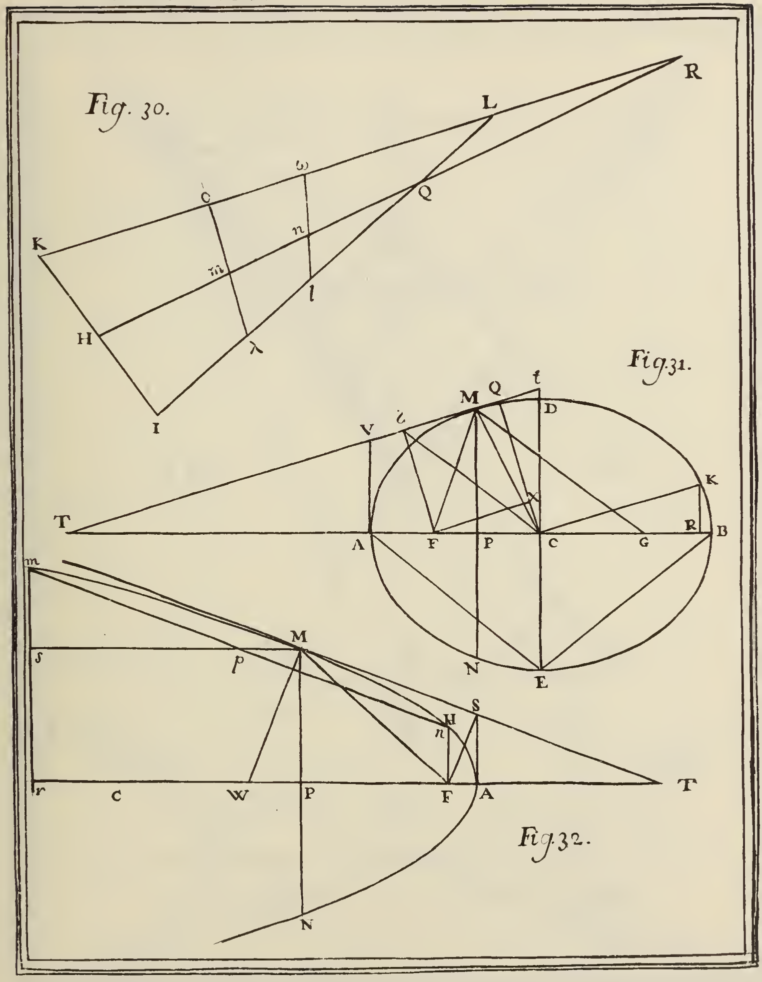
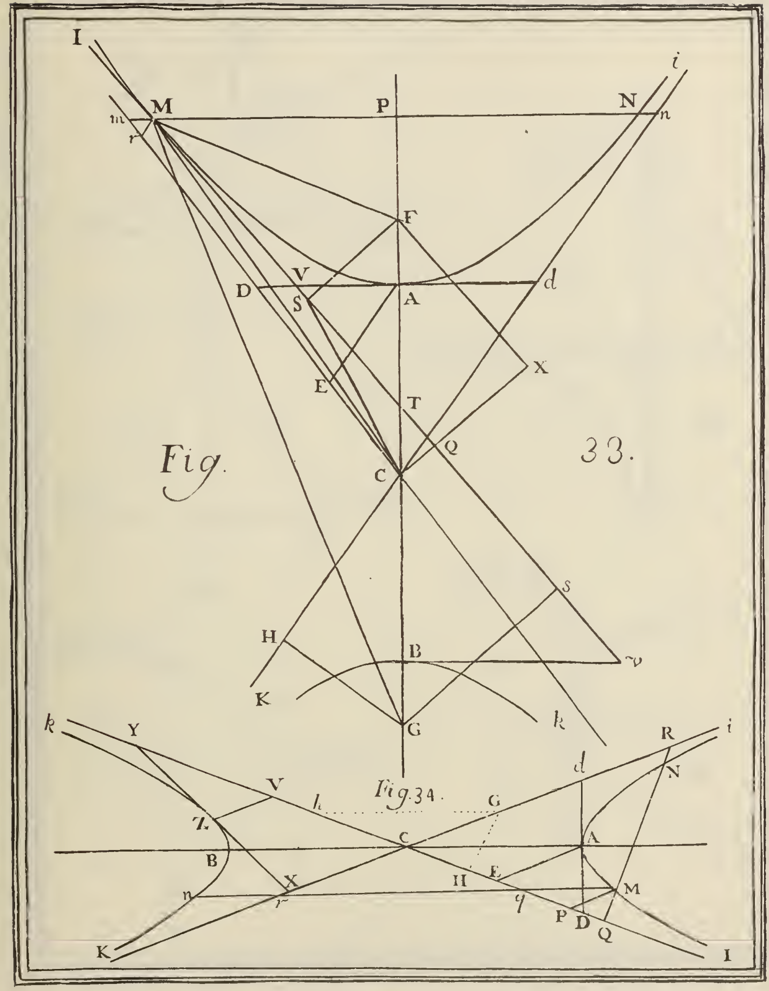


Fig. 30.
R
L
ω
c
Q
n
K
m
l
H
λ
I
Fig. 31.
t
M
Q
D
V
i
K
x
T
R
B
A
F
P
C
G
N
E
Fig. 32.
m
M
s
p
S
H
n
r
C
W
P
F
A
T
N

TAB. IX.



TAB X

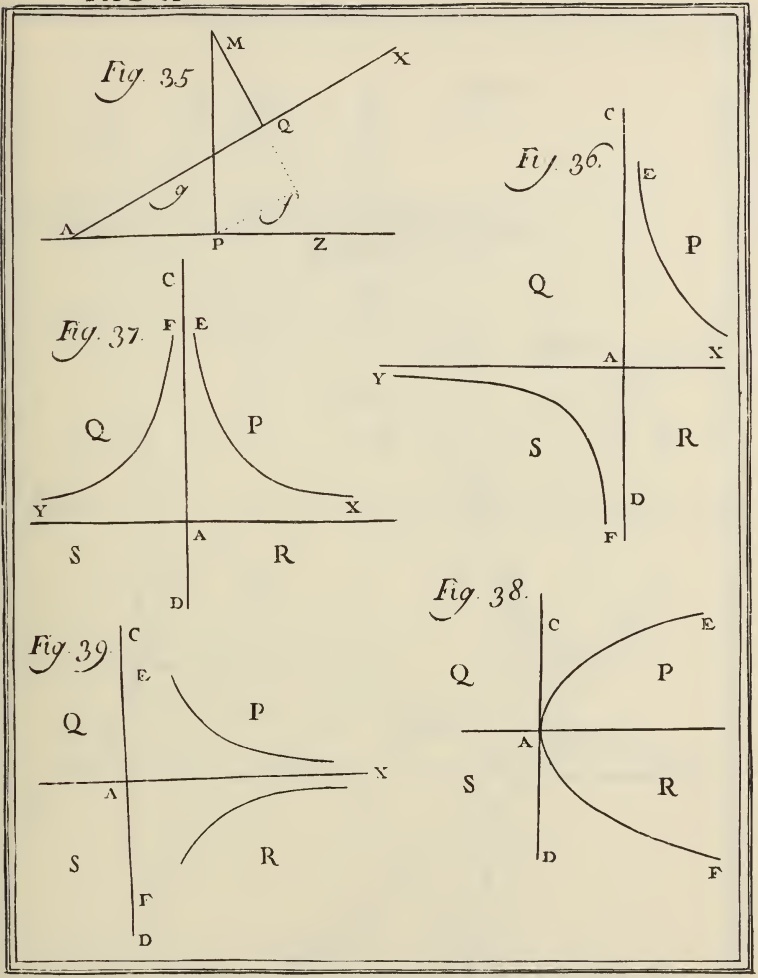
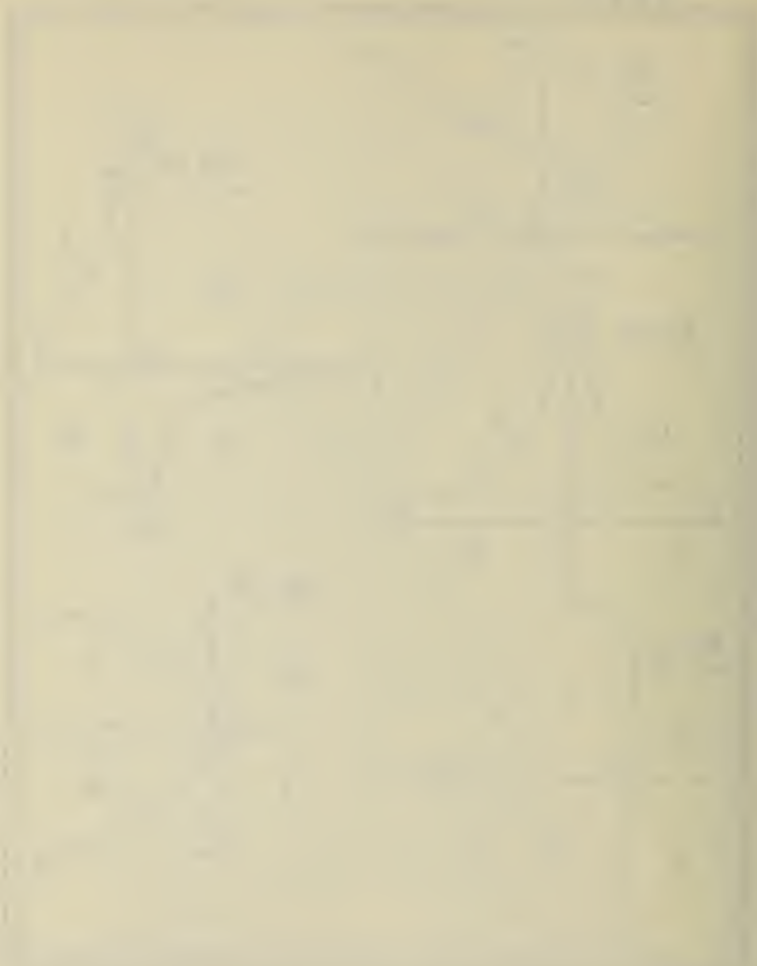


Fig. 35
M
X
Q
A
P
Z
Fig. 36.
C
E
P
Q
A
X
Y
S
R
D
F
Fig. 37.
C
F
E
Q
P
Y
X
A
S
R
D
Fig. 38.
C
E
Q
P
A
S
R
D
F
Fig. 39.
C
E
Q
P
A
X
S
R
F
D



TAB. XI

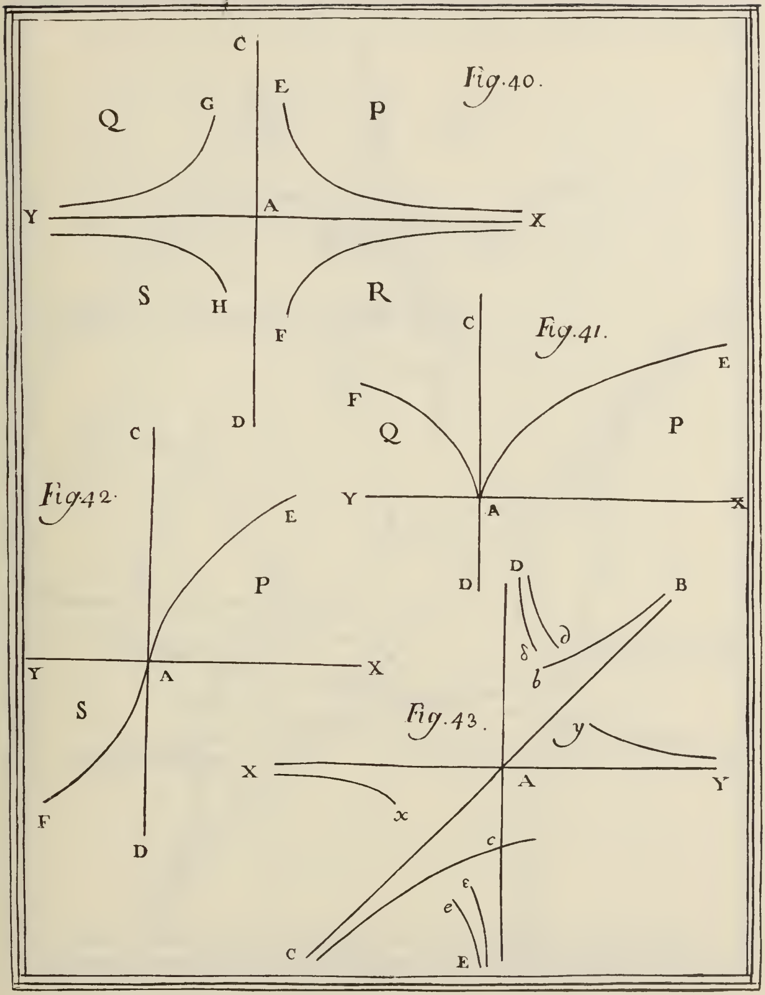


Fig. 40.
C E G Q P Y A X S H R F D
Fig. 41.
C F E Q P Y A X D
Fig. 42.
C E P Y A X S F D
Fig. 43.
D B δ ∂ b y X A Y x c ε e C E

TAB. XII.

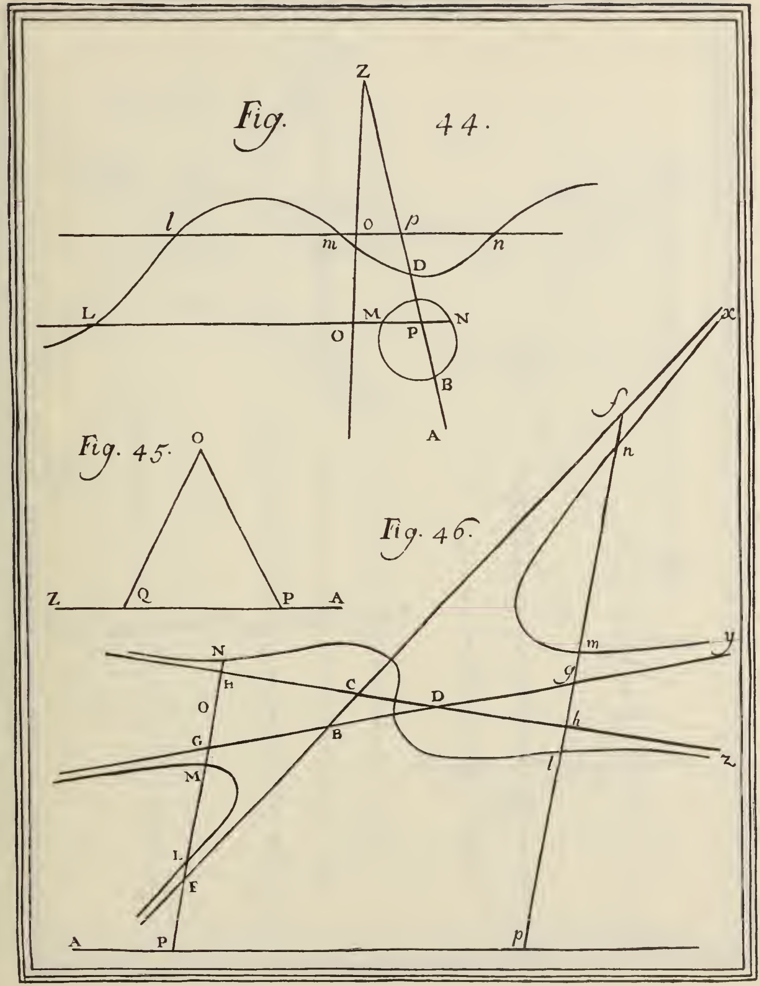


Fig. 44.
Z
l
o
p
m
n
D
L
M
N
O
P
B
A
Fig. 45.
O
Z
Q
P
A
Fig. 46.
x
f
n
m
y
N
H
O
C
D
g
h
G
B
z
M
l
L
F
A
P
p

TAB. XIII.

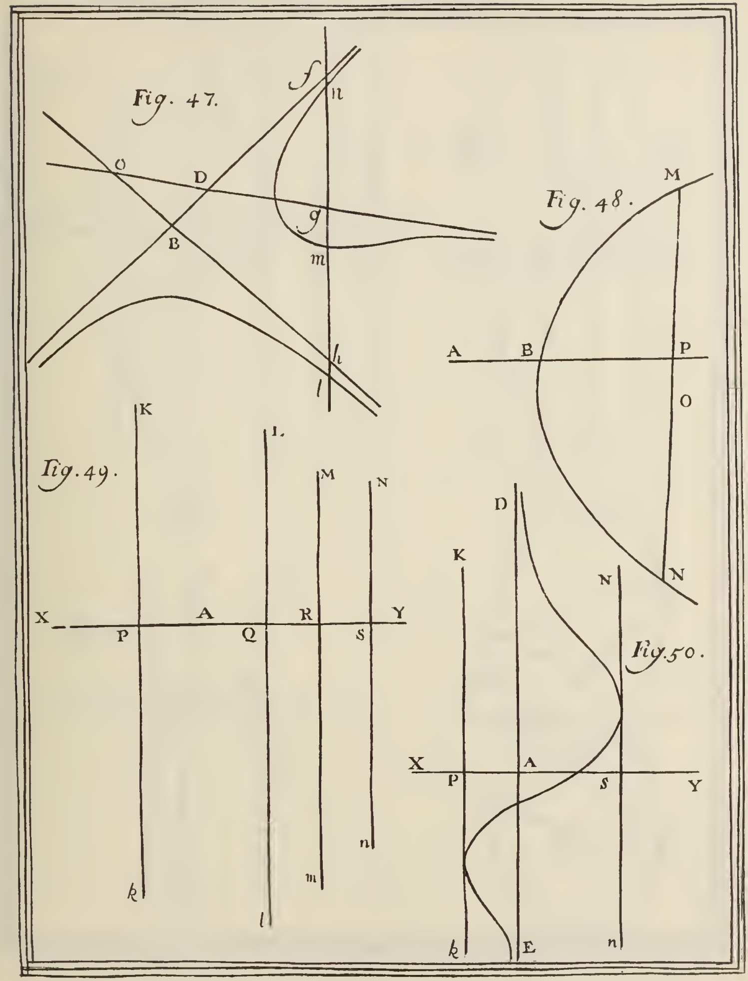


Fig. 47.
f
n
O
D
g
B
m
h
l
Fig. 48.
M
A
B
P
O
N
Fig. 49.
K
L
M
N
X
A
R
Y
P
Q
S
k
l
m
n
Fig. 50.
D
K
N
X
A
P
S
Y
k
E
n

TAB. XIV.

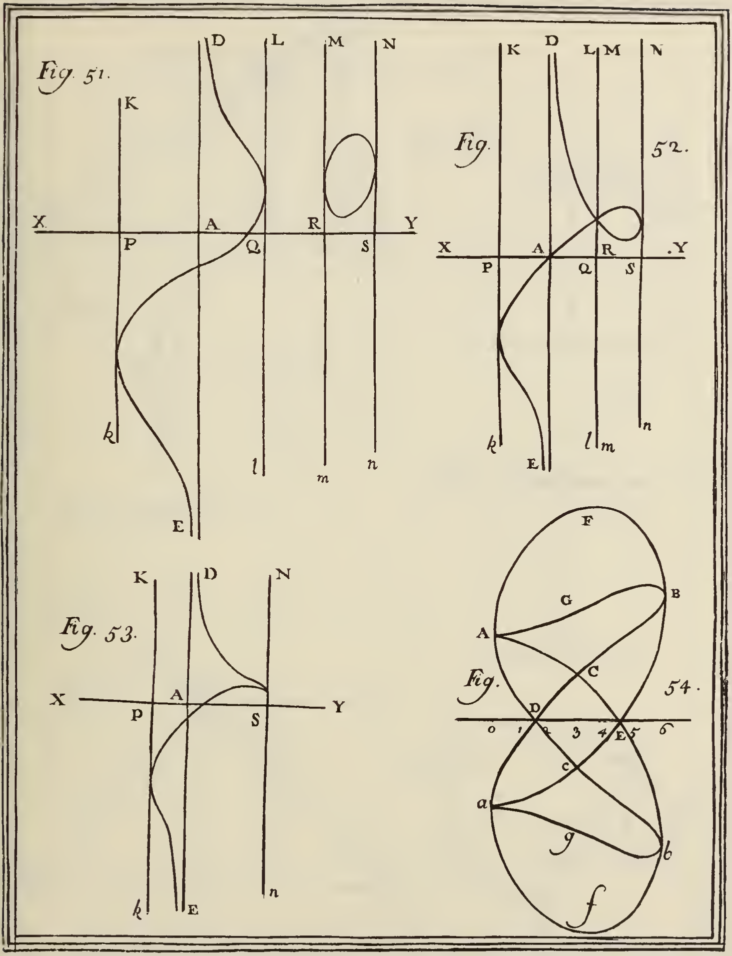


Fig. 51.
D L M N
K
X A R Y
P Q S
k l m n
E
Fig. 52.
K D L M N
X A R Y
P Q S
k E l m n
Fig. 53.
K D N
X A Y
P S
k E n
Fig. 54.
F
G B
A
C
D
0 1 2 3 4 E 5 6
c
a
g b
f

TAB. XV.

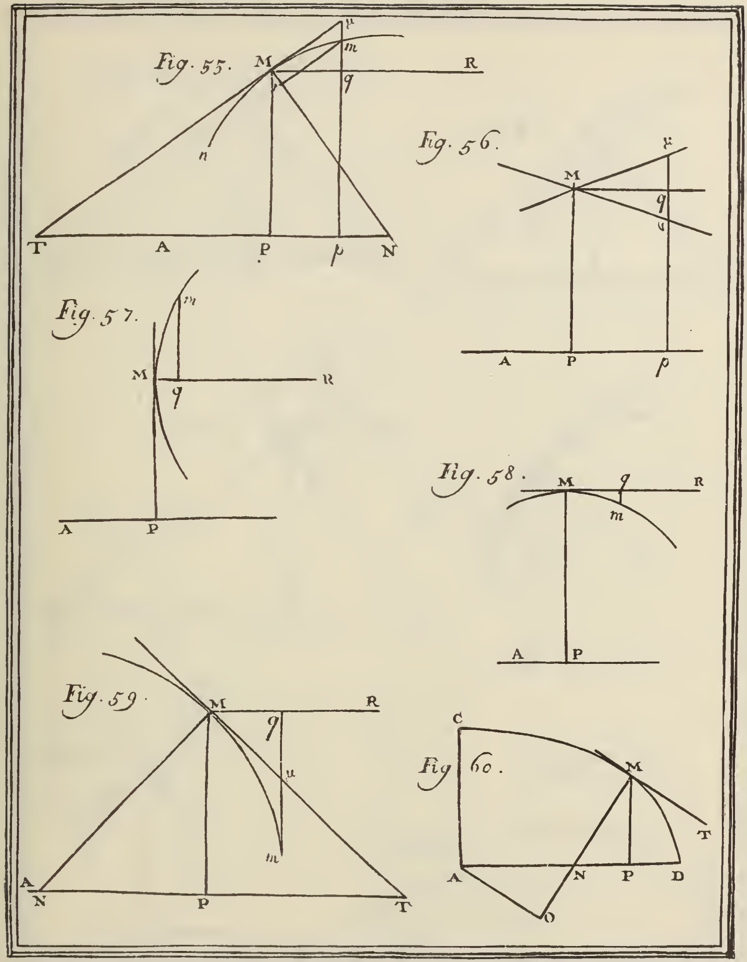


Fig. 55.
μ
m
M
R
q
n
T
A
P
p
N
Fig. 56.
M
q
A
P
p
Fig. 57.
m
M
q
R
A
P
Fig. 58.
M
q
R
m
A
P
Fig. 59.
M
R
q
μ
m
A
N
P
T
C
Fig 60.
M
T
A
N
P
D
O

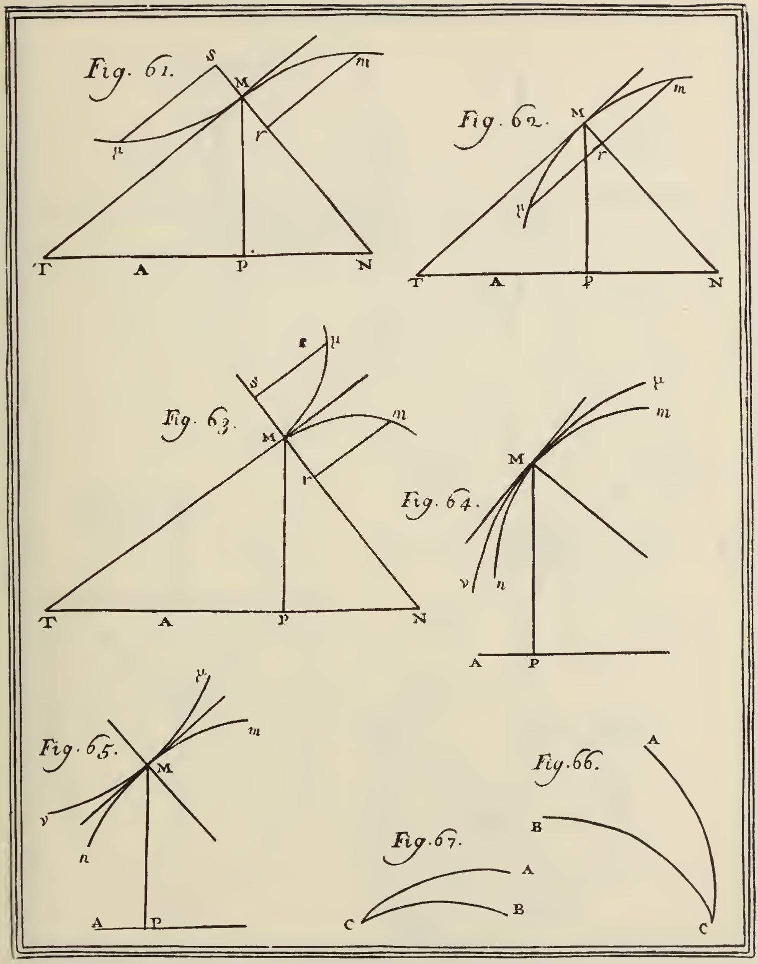


Fig. 61.
S
M
m
r
μ
T
A
P
N
Fig. 62.
M
m
r
μ
T
A
P
N
Fig. 63.
μ
S
M
m
r
T
A
P
N
Fig. 64.
μ
m
M
ν
n
A
P
Fig. 65.
μ
m
M
ν
n
A
P
Fig. 66.
A
B
C
Fig. 67.
A
B
C

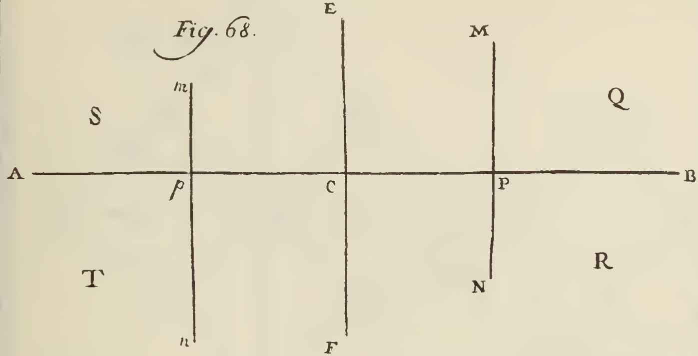


Fig. 68.

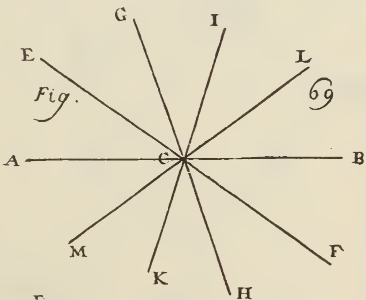


Fig. 69

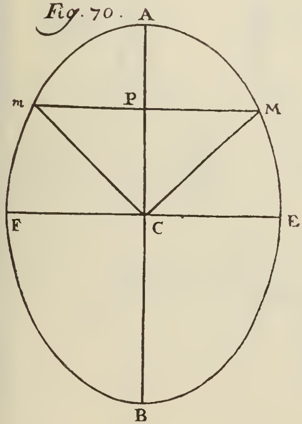


Fig. 70.

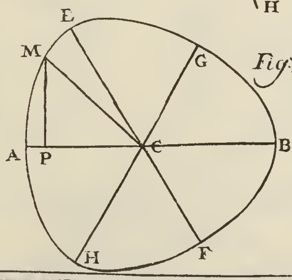


Fig. 71.

TAB. XVIII.

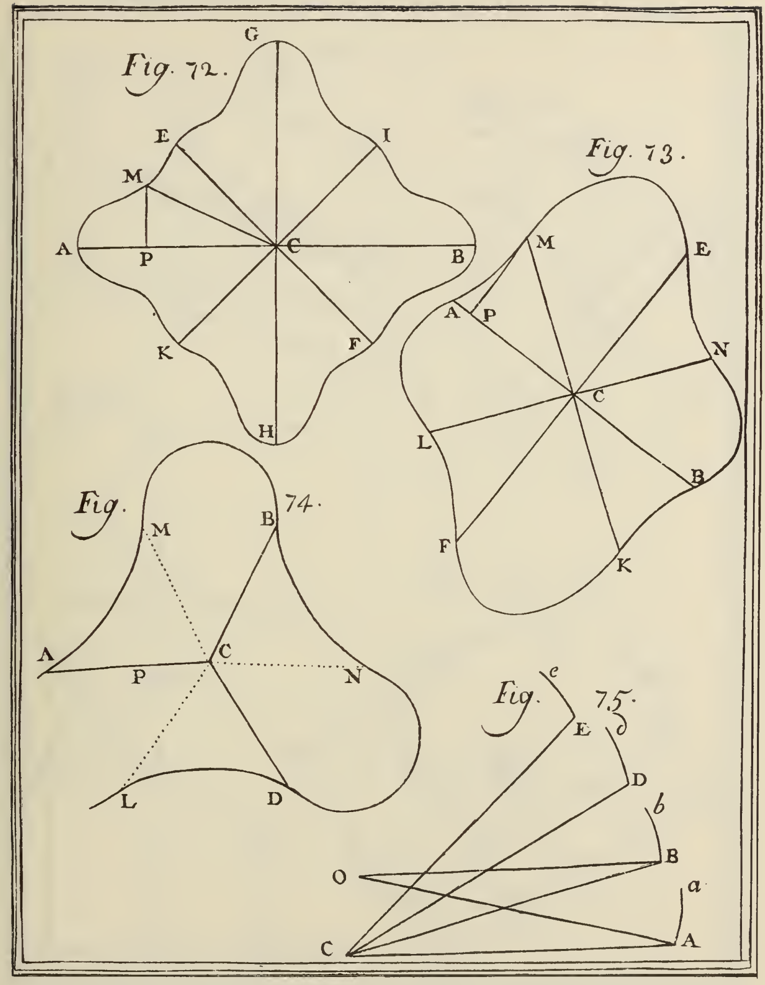


Fig. 72.
G
E
I
M
A
P
C
B
K
F
H
Fig. 73.
M
E
A
P
N
C
L
B
F
K
Fig. 74.
M
B
A
C
P
N
L
D
Fig. 75.
e
E
d
D
b
B
O
a
A
C

TAB XIX

Fig 76

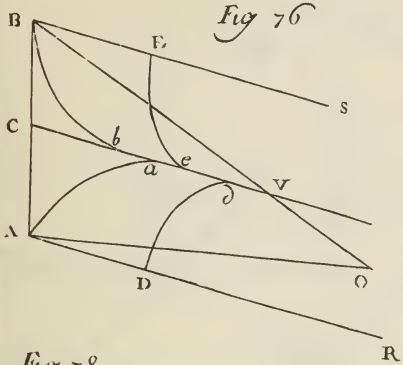


Fig 77

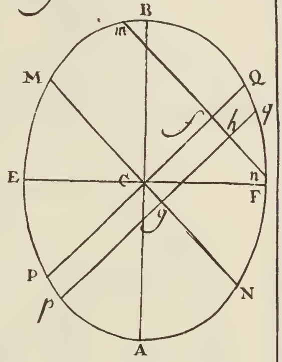


Fig 78

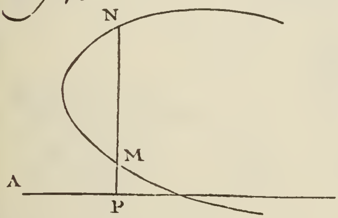


Fig 79

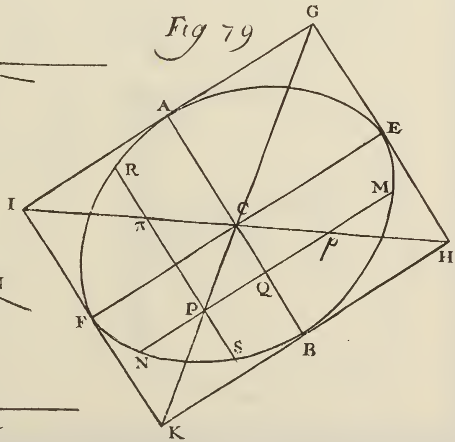
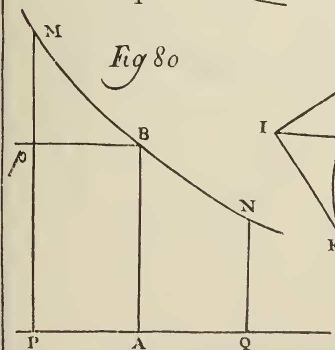


Fig 80



TAB XX

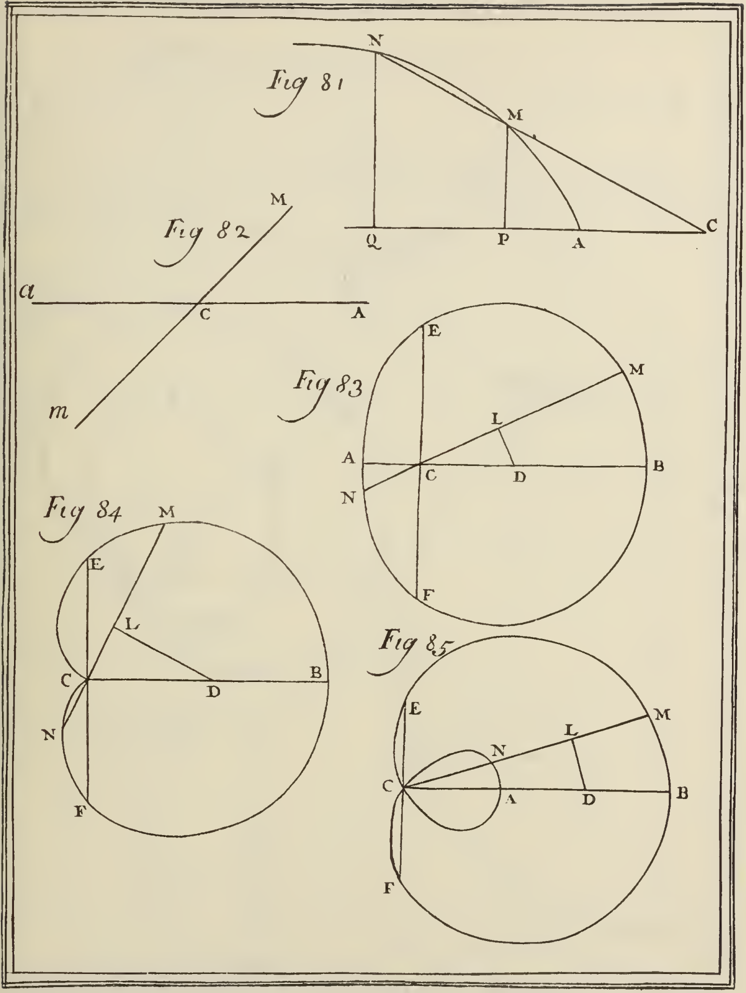


Fig 81
N
M
Q
P
A
C
Fig 82
M
a
C
A
m
Fig 83
E
M
L
A
C
D
B
N
F
Fig 84
M
E
L
C
D
B
N
F
Fig 85
E
M
L
N
C
A
D
B
F

TAB. XXI.

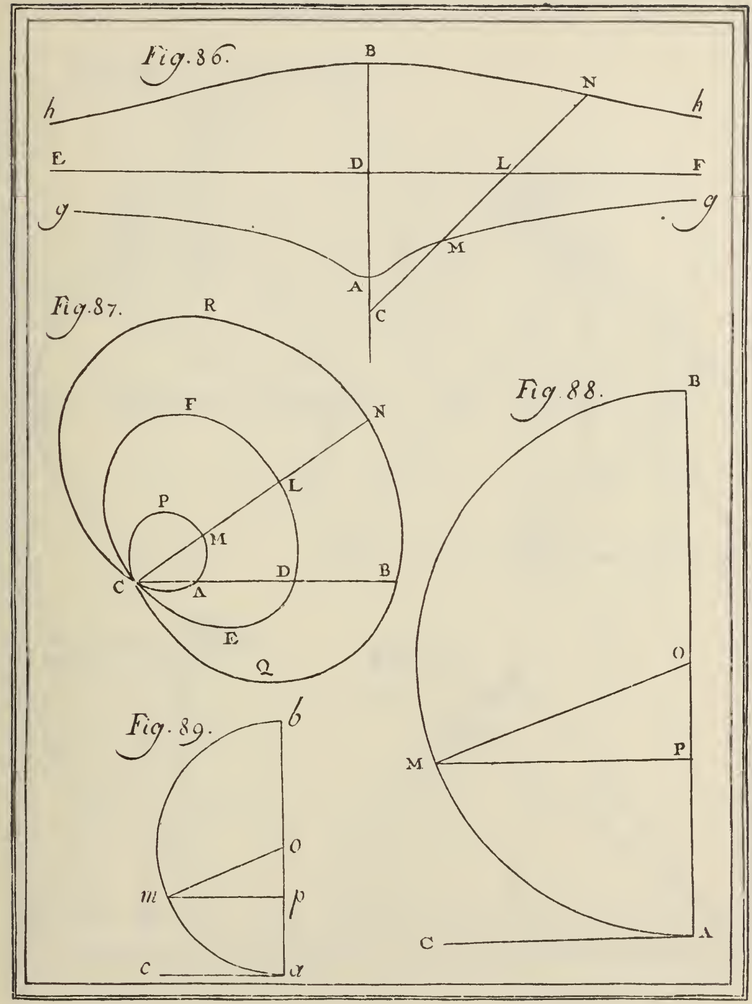


Fig. 86.
B
N
h
h
E
D
L
F
g
g
M
A
C
Fig. 87.
R
F
N
L
P
M
C
A
D
B
E
Q
Fig. 88.
B
O
P
M
C
A
Fig. 89.
b
o
m
p
c
a

TAB. XXII.

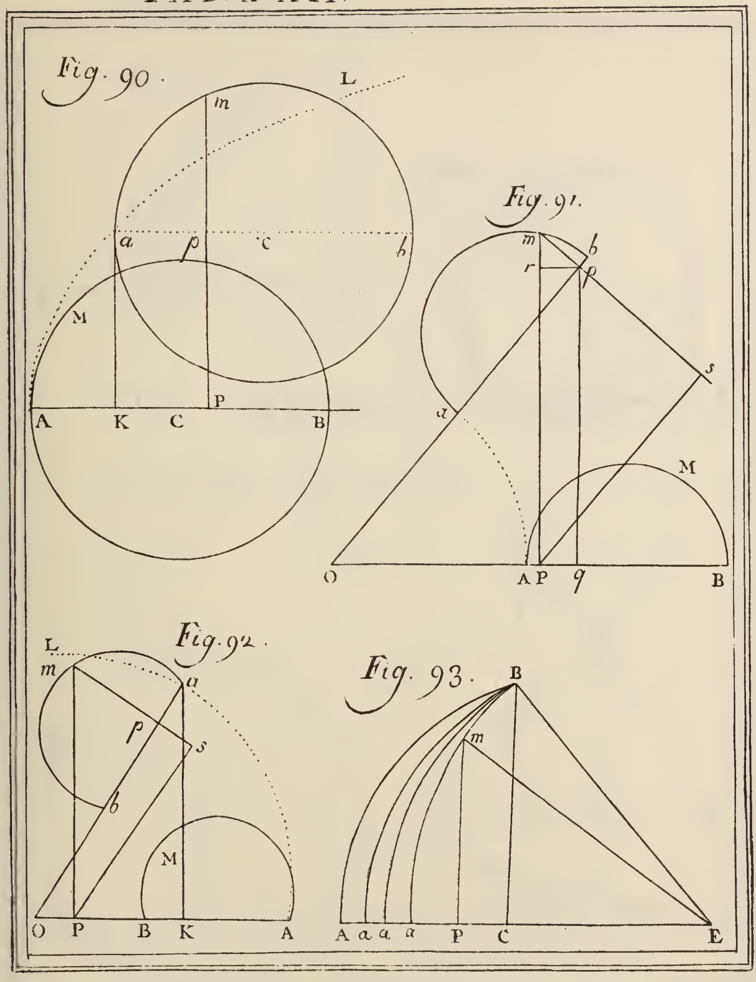


Fig. 90.
L
m
a
p
c
b
M
P
A
K
C
B
Fig. 91.
m
b
r
p
s
a
M
O
A P
q
B
Fig. 92.
L
m
a
p
s
b
M
O
P
B
K
A
Fig. 93.
B
m
A
a
a
a
P
C
E

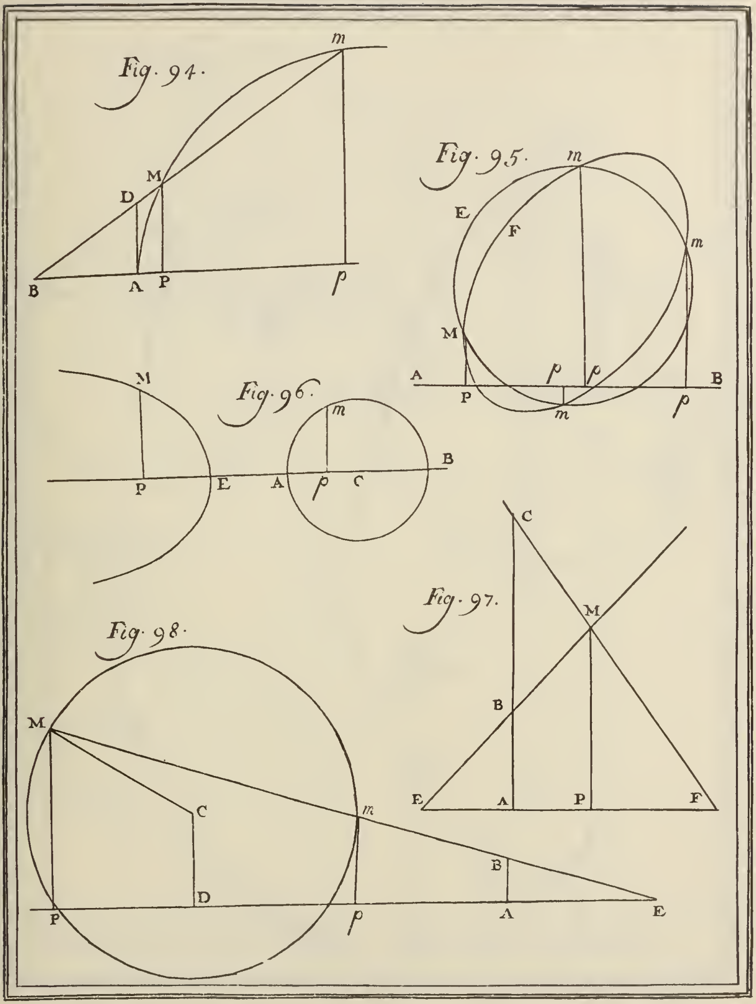


Fig. 94.
m
M
D
B
A
P
p
Fig. 95.
m
E
F
m
M
A
p
p
B
P
m
p
Fig. 96.
M
m
B
P
E
A
p
C
C
Fig. 97.
M
B
E
A
P
F
Fig. 98.
M
C
m
B
D
P
p
A
E

TAB. XXIV

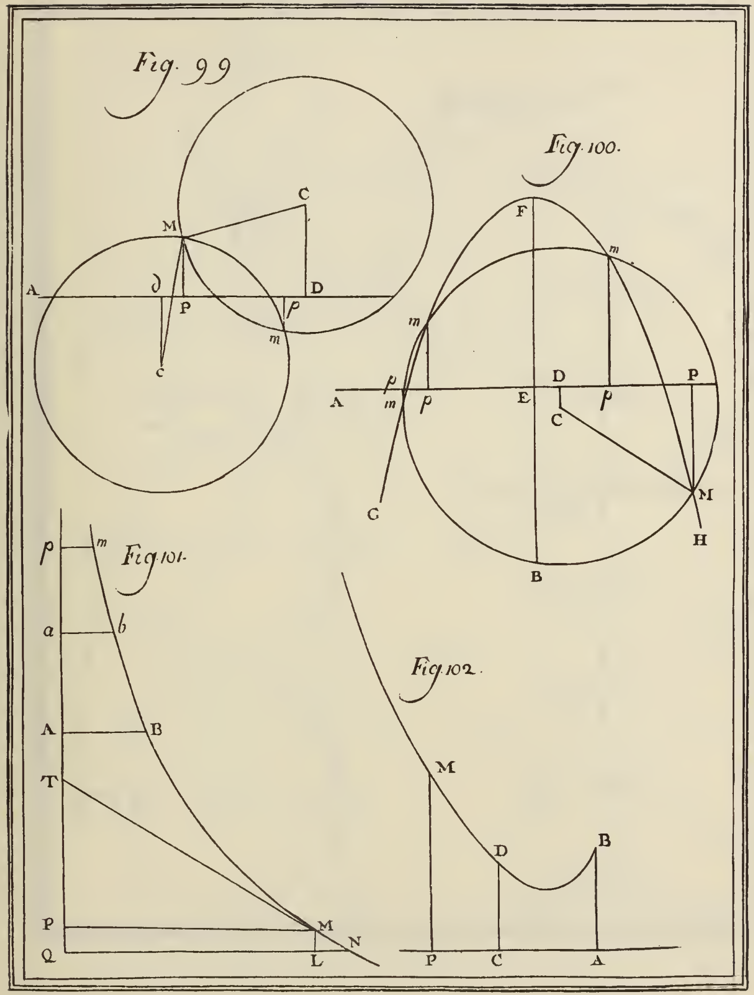
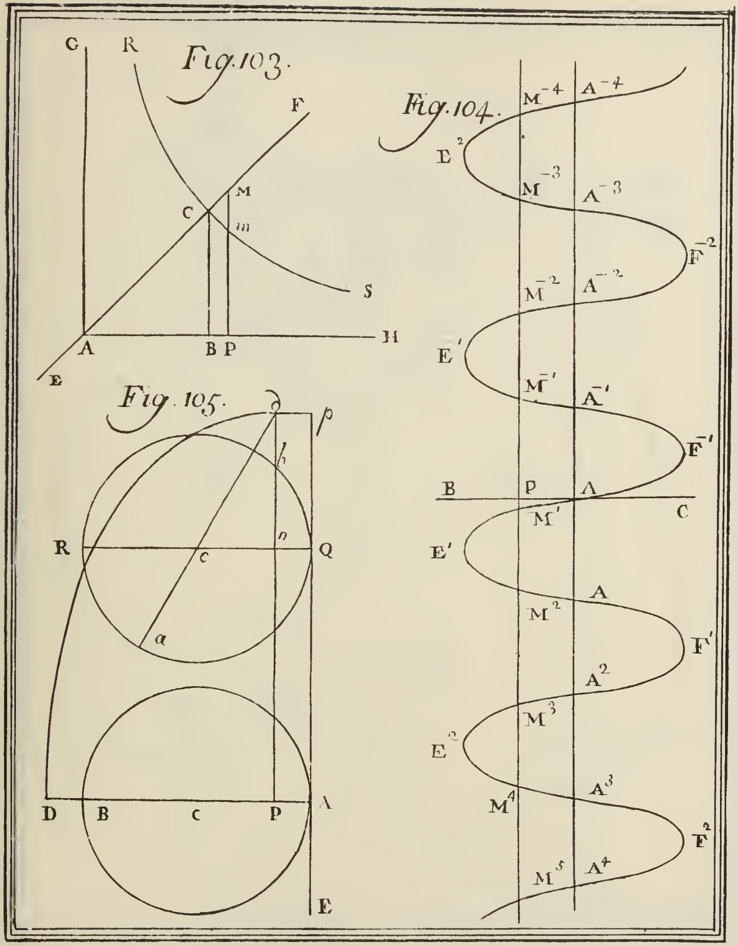
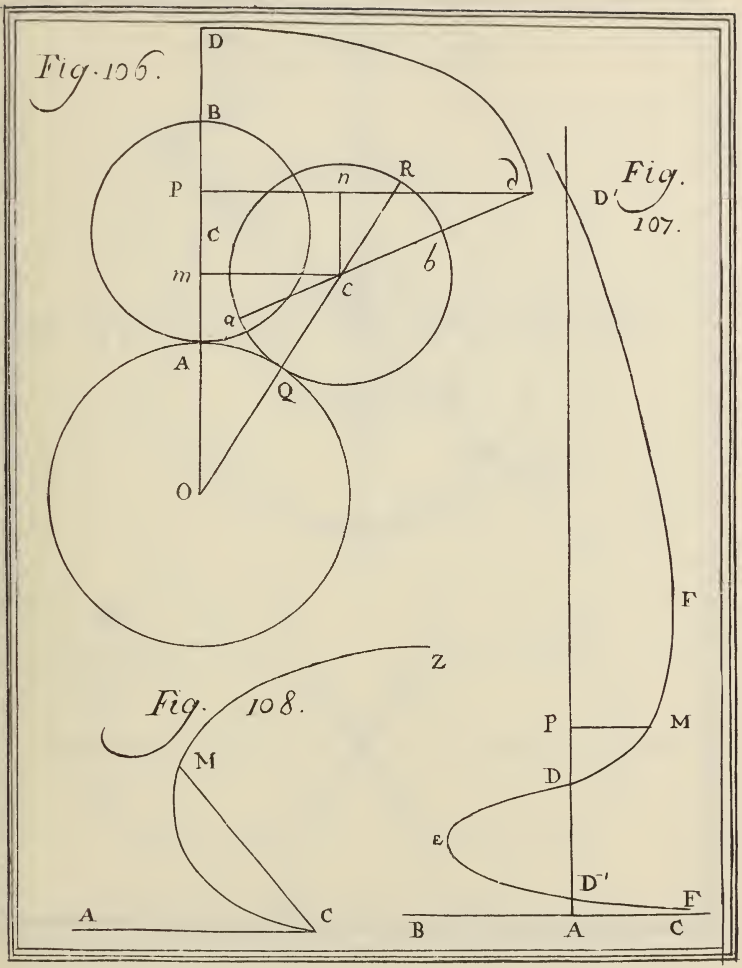


Fig. 99
A
M
C
D
P
p
m
c
Fig. 100
F
m
D
P
A
E
p
C
M
G
H
B
Fig. 101
p
m
a
b
A
B
T
P
M
N
Q
L
Fig. 102
M
D
B
P
C
A

TAB. XXV.



TAB. XXVI.



TAB. XXVII.

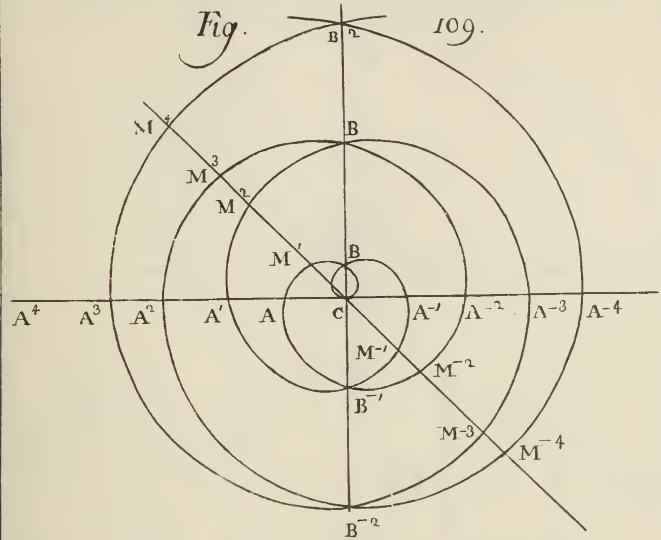


Fig. 109.

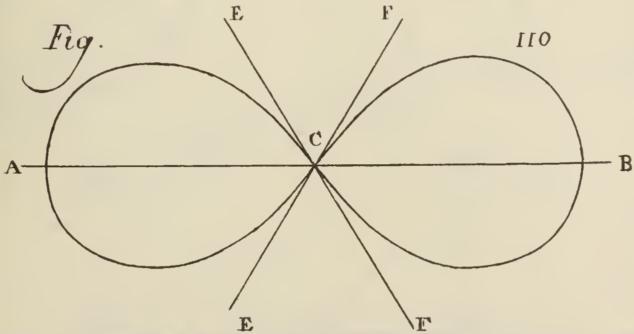


Fig. 110

TAB. XXVIII.

Fig. 111.

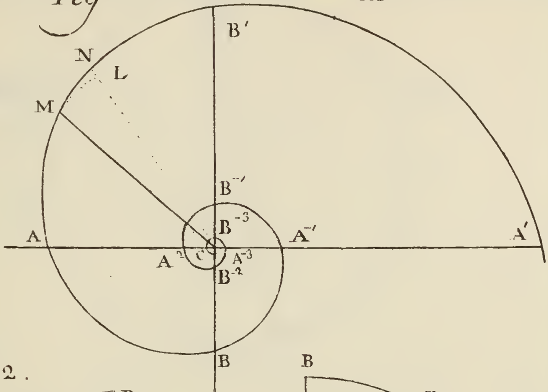


Fig. 112.

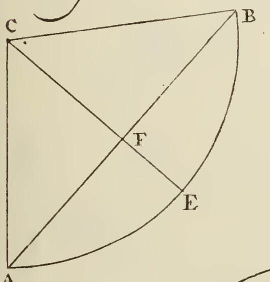


Fig. 113.

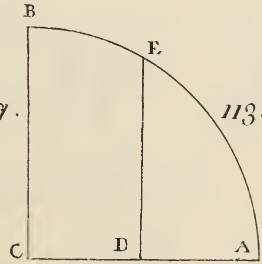
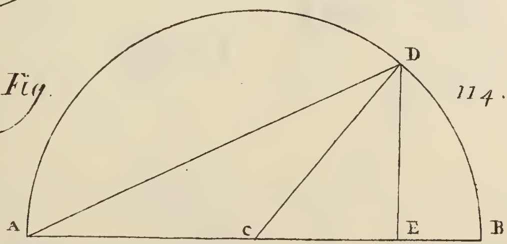
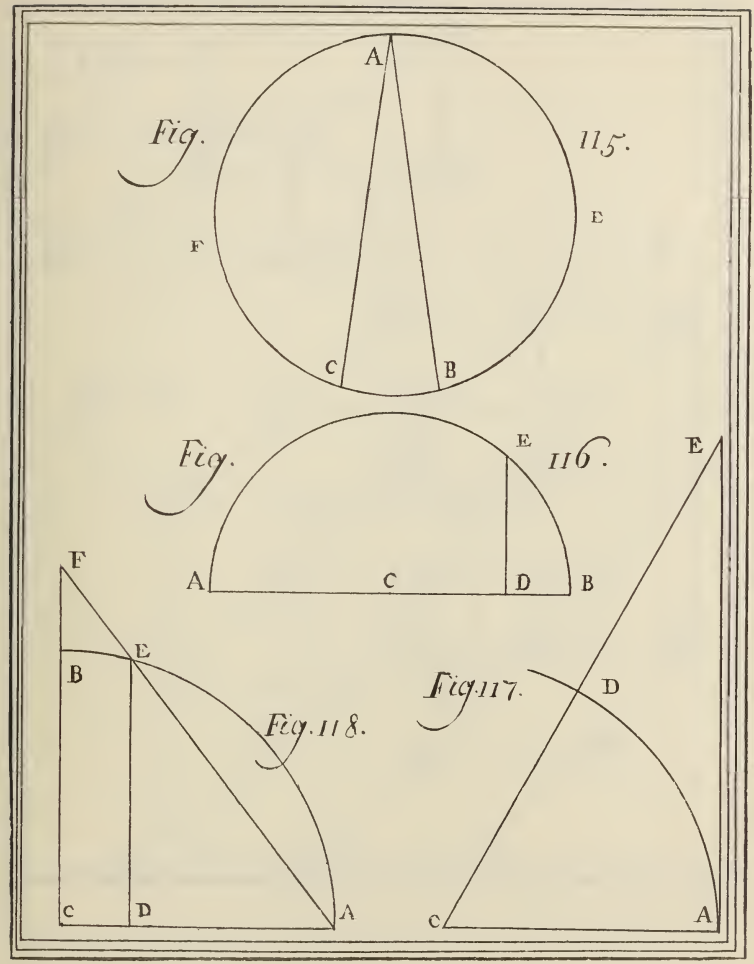


Fig. 114.



TAB. XXIX.



TAB. XXX.

Fig. 119.

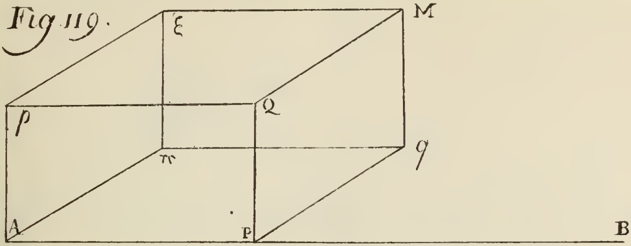
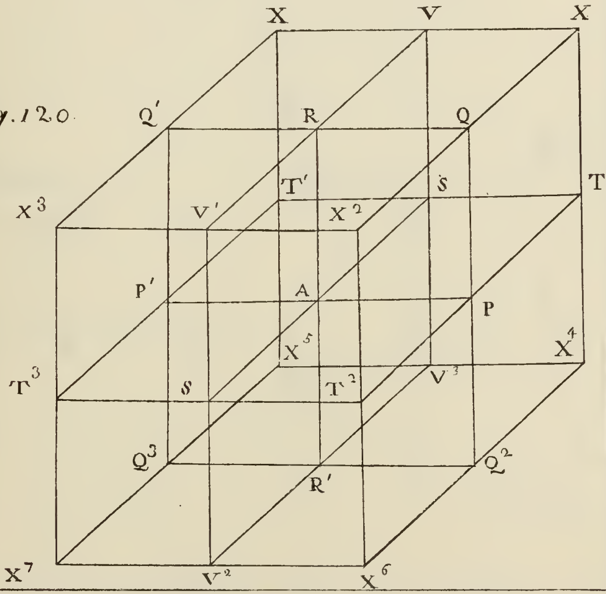
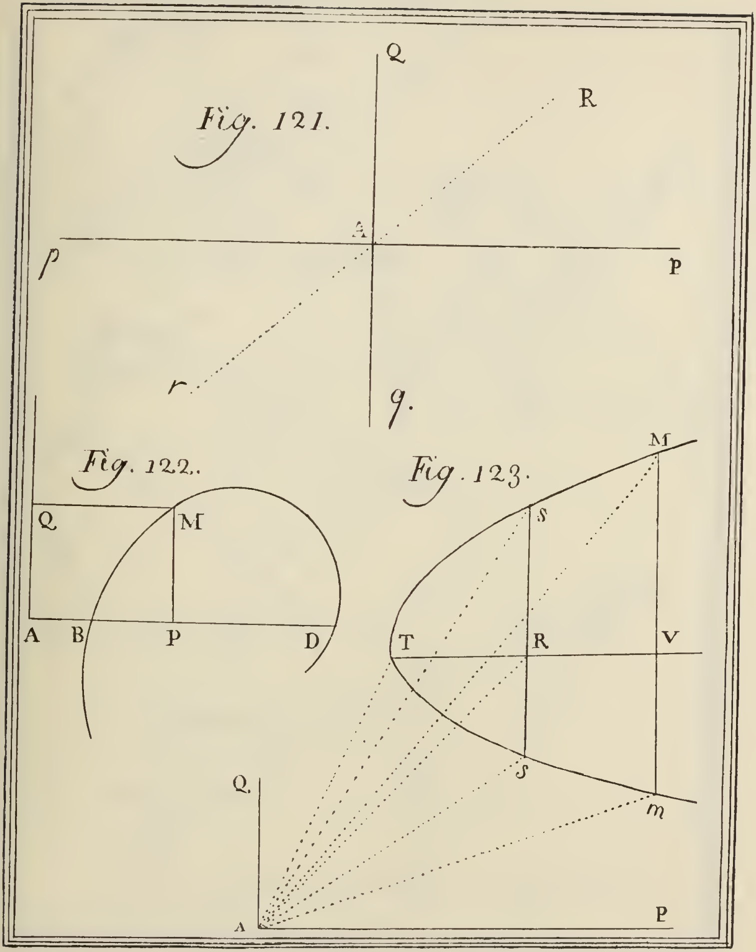


Fig. 120.



TAB. XXXI.



TAB. XXXII.

Fig. 124.

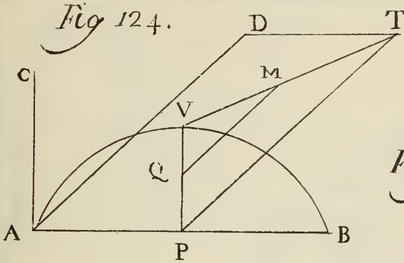


Fig. 125.

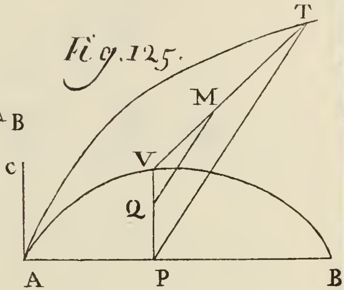


Fig. 126.

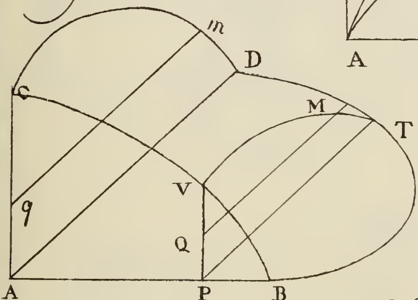
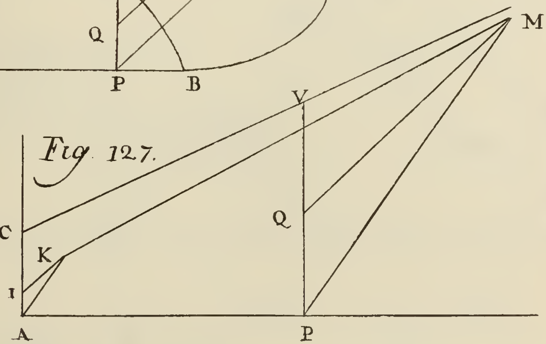


Fig. 127.



TAB. XXXIII.

Fig. 128.

Fig. 129.

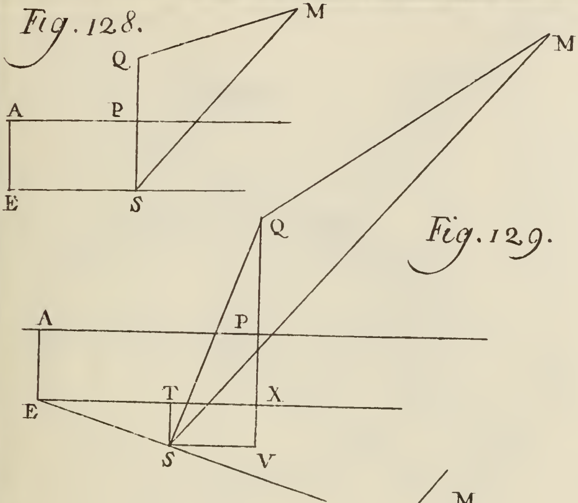


Fig. 130.

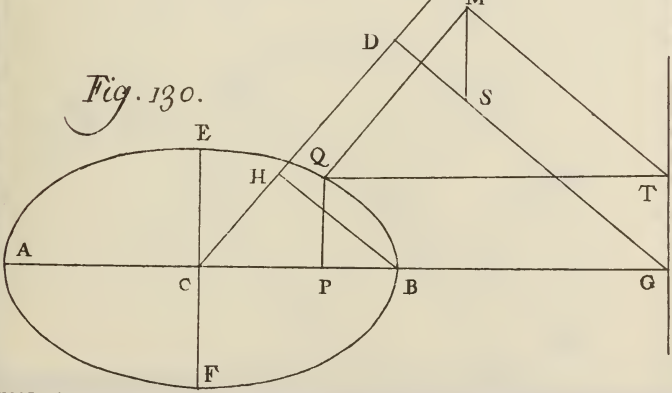


Fig. 131.

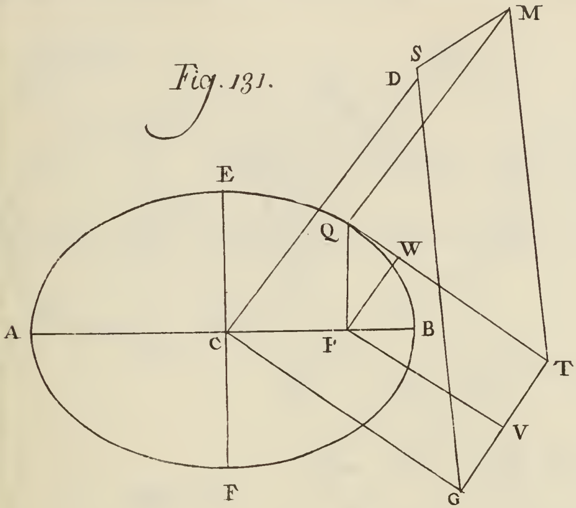


Fig. 132.

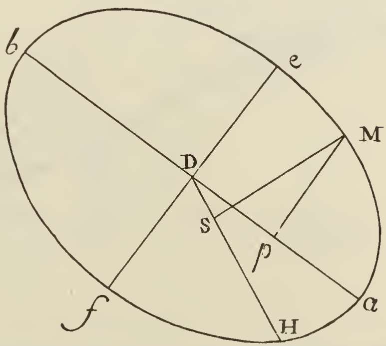


Fig. 133.

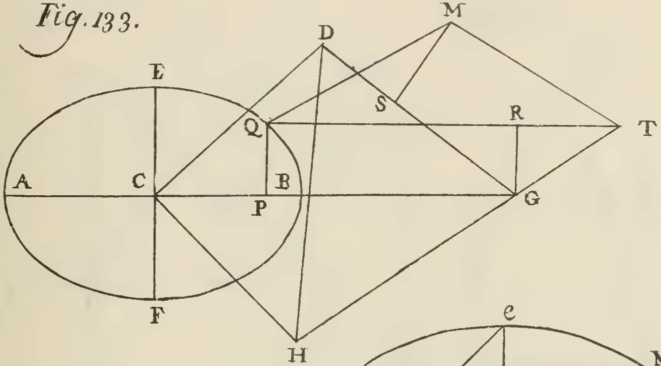
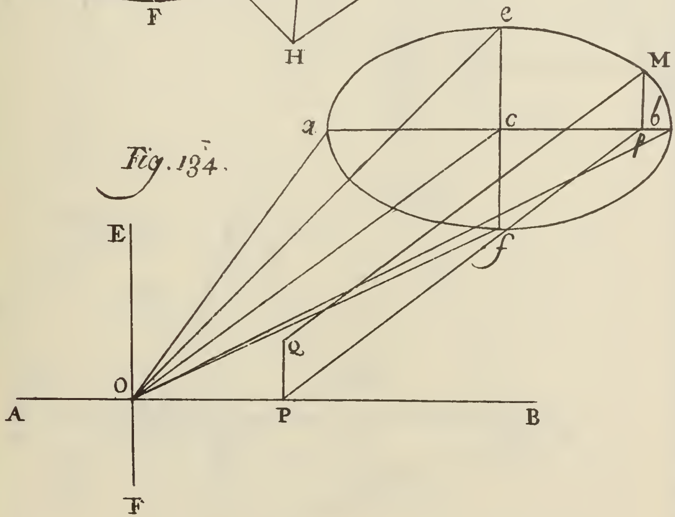


Fig. 134.



TAB. XXXVI.

Fig. 135.

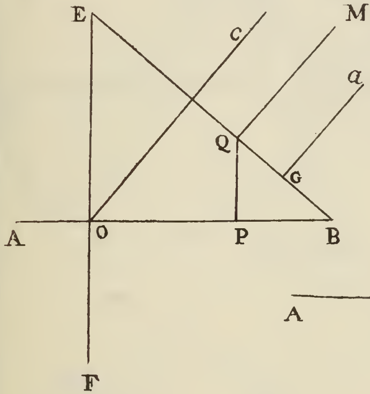


Fig. 136.

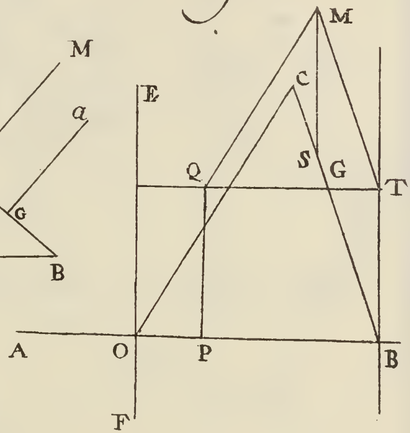
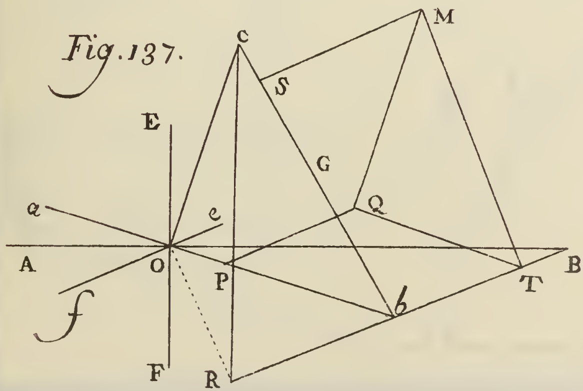


Fig. 137.



TAB. XXXVII.

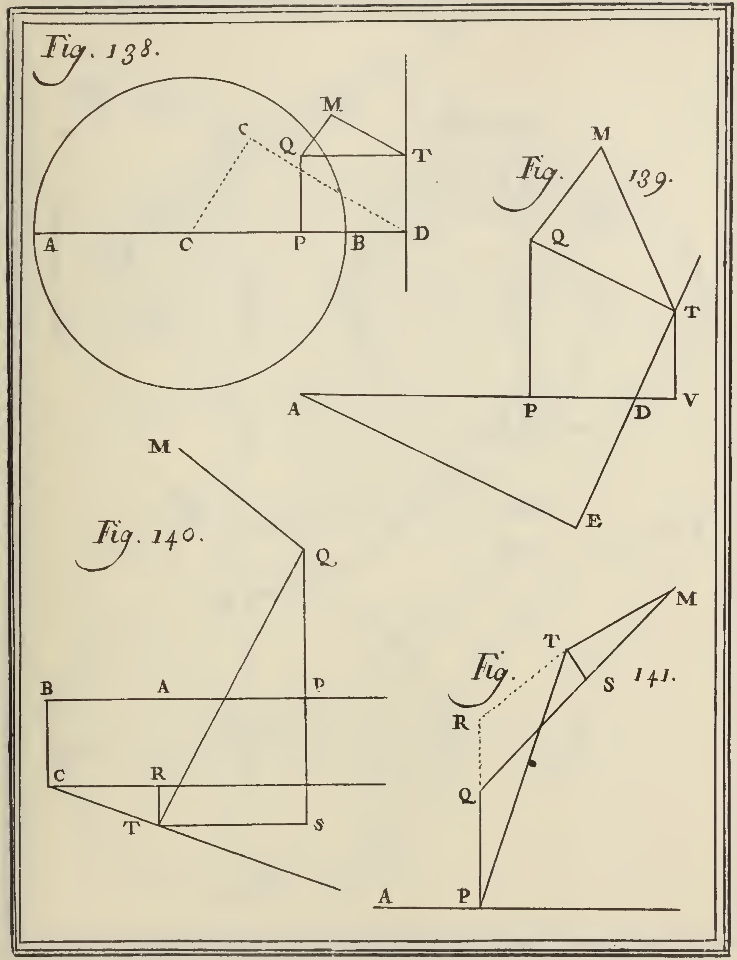
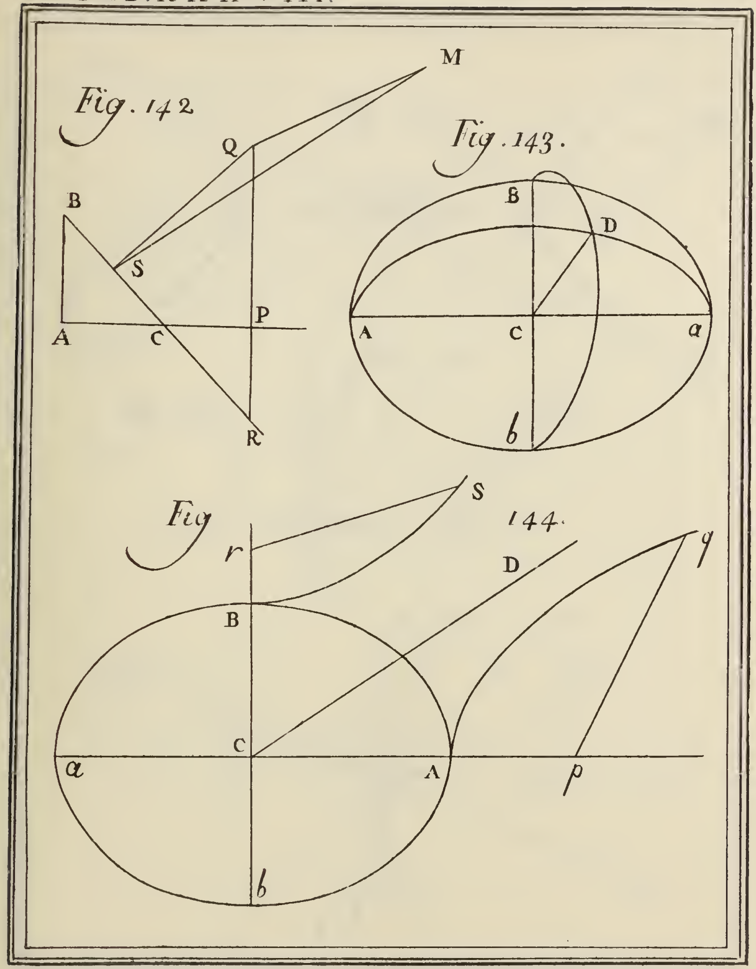


Fig. 138.
M
Q
T
D
A
C
P
B
Fig. 139.
M
Q
T
A
P
D
V
E
Fig. 140.
M
Q
B
A
P
C
R
T
S
Fig. 141.
M
T
S
R
Q
A
P

TAB. XXXVIII.



TAB. XXXIX.

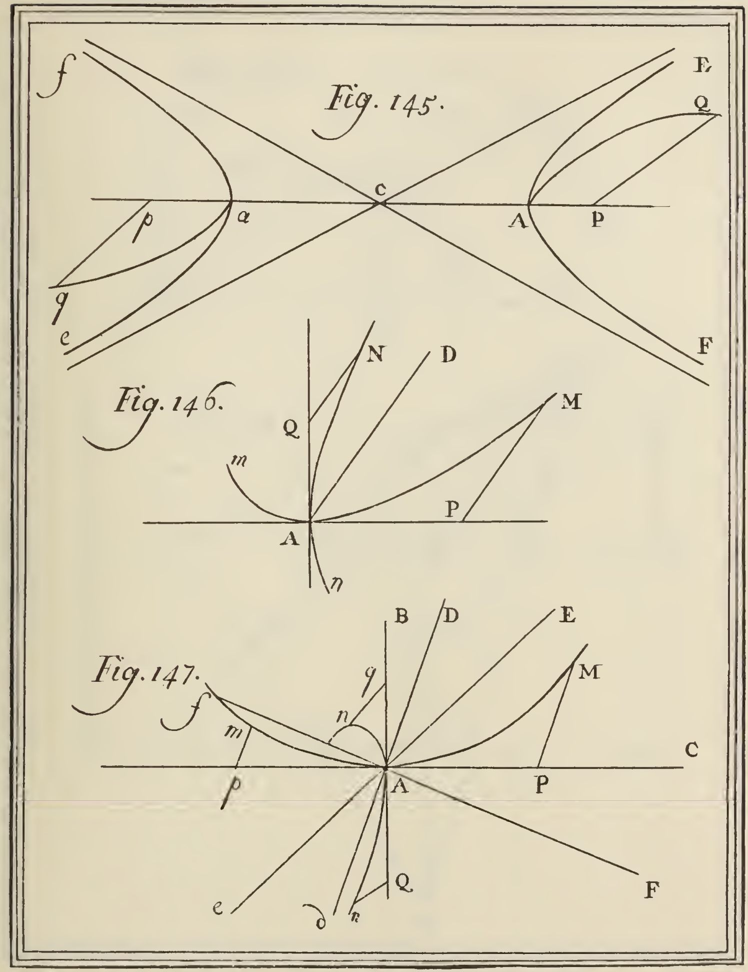


Fig. 145.
f
E
Q
C
a
p
A
P
q
e
F
Fig. 146.
N
D
Q
M
m
P
A
n
Fig. 147.
B
D
E
q
M
f
n
m
C
p
A
P
Q
F
e
d
r

TAB. XL.

Fig. 148.

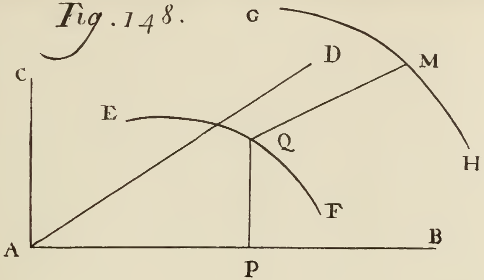
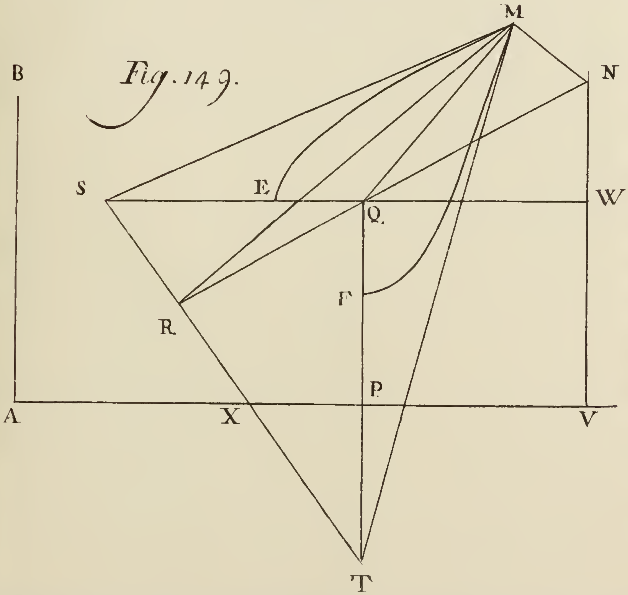


Fig. 149.



Date Due

STEACIE	MAR	8 1973	
YORK	MAR 1	4 1973	